

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Розрахунок перехідних процесів у складних електричних колах

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Розрахунок перехідних процесів у складних електричних колах [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. Спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Є.А.Кудря, В.І. Чибеліс, В.Ю. Лободзинський – Електронні текстові данні (1 файл: 1.60 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 62 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.) за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол № 10 від 21.05.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Розрахунок перехідних процесів у складних електричних колах

Укладачі: Кудря Є.А. канд. техн. наук, доц.
Чибеліс В.І. канд. техн. наук, доц.
Лободзинський В.Ю. асистент

Відповідальний редактор Бойко В. С. д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: Реуцький М.О. канд. техн. наук, доц.
Бардик Є.І. канд. техн. наук, доц.

Навчальний посібник призначений для самостійної роботи студентів по вивченню і розрахунку перехідних процесів, що виникають в лінійних електричних колах. У вказівках коротко викладені основні теоретичні положення; прикладені розрахунки типових задач. На завершення самостійної роботи над темою студенти виконують розрахунково-графічну роботу.

Даний електронний ресурс призначений для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

ЗМІСТ

Загальні методичні вказівки	5
1 Основні визначення. Закони комутації.	8
2 Класичний метод розрахунку перехідних процесів	10
2.1 Визначення початкових умов	11
2.2 Визначення усталених (вимушених) складових	12
2.3 Складання характеристичного рівняння	13
2.4 Визначення постійних інтегрування	14
2.5 Алгоритм розрахунку перехідного процесу класичним методом	15
2.6 Приклади розрахунку класичним методом перехідного процесу в електричних колах з двома реактивними елементами	18
2.6.1 Аперіодичний режим в колах з джерелами постійної напруги	18
2.6.2 Побудова графіка зміни перехідного струму при аперіодичному режимі	23
2.6.3 Коливальний режим в колах з джерелами постійної напруги	25
2.6.4 Побудова графіка зміни перехідного струму при коливальному режимі	29
3 Розрахунок початкових умов в колі з джерелами синусоїдної напруги	31
4 Операторний метод розрахунку перехідних процесів	34
4.1 Математичні основи методу. Алгоритм розрахунку перехідного процесу операторним методом	34
4.1.1 Операторна схема заміщення	35
4.1.2 Перехід від зображення до оригіналу	38
4.2. Приклади розрахунку операторним методом перехідного процесу в електричних колах з двома реактивними елементами	39
4.2.1 Аперіодичний режим в колах з джерелами постійної напруги	39
4.2.2 Коливальний режим в колах з джерелами постійної напруги	43

5 Розрахунок перехідних процесів при ввімкненні коли до напруги довільної форми. Інтеграл Дюамеля	46
5.1 Приклади розрахунку перехідного процесу за допомогою інтеграла Дюамеля при підключенні пасивного двополюсника до напруги довільної форми	49
6 Умови завдання	55
Список рекомендованої літератури	62

Загальні методичні вказівки

Навчальний посібник призначений для самостійної роботи студентів по вивченню і розрахунку перехідних процесів, що виникають в лінійних електричних колах.

У посібнику коротко викладені основні теоретичні положення; для більш глибокого вивчення важливого розділу курсу ТОЕ потрібна робота з навчальною літературою. Перелік літератури наданий в кінці цих вказівок.

До поданих на перевірку індивідуальних домашніх завдань ставляться такі вимоги:

1. Завдання повинні бути виконані на чистих аркушах паперу четвертого формату або у зошиті, обов'язково зшитих.
2. Основні дії при виконанні завдання повинні супроводжуватися докладними поясненнями.
3. Малюнки, графіки, схеми, в тому числі і задані умовою задачі, повинні бути виконані на окремому аркуші паперу (сторінці) охайно і в зручному для читання масштабі.
4. Обчислення повинні бути виконані з точністю до третьої значущої цифри.
5. Завдання повинно бути підписано студентом і вказана дата виконання.

Не зараховані завдання повинні бути виправлені і здані на повторну перевірку разом з початковим варіантом роботи і зауваженнями викладача. Виправлення помилок в перевіреному тексті не допускається. Всі виправлення повинні бути виконані окремо під заголовком «Виправлення помилок».

Рекомендується, опрацьовуючи матеріал, складати конспект, в який корисно виписувати основні закони, визначення та формули. Конспект надає велику допомогу при виконанні контрольних завдань і при підготовці до іспитів. Робота над індивідуальним домашнім завданням допомагає

студентам перевірити ступінь засвоєння ними дисципліни, виробляє у них навички чітко і коротко викладати свої думки. Для успішного досягнення цієї мети необхідно керуватися наступними правилами:

1. Починаючи розв'язок задачі, вказати, які фізичні закони або методи передбачається використовувати при аналізі, привести математичний запис цих законів і методів.

2. Ретельно продумати, які літерні або цифрові позначення передбачається використовувати в рішенні. Пояснити значення кожного позначення.

3. При виконанні завдання не слід змінювати раз прийняті напрямки струмів і найменування вузлів, опорів, а також позначення, задані умовою. При вирішенні однієї і тієї ж задачі різними методами одну і ту ж величину необхідно позначати одним і тим же буквеним символом.

4. Розрахунок кожної вихідної величини виконати спочатку в загальному вигляді, а потім в отриману формулу підставити числові значення і привести остаточний результат із зазначенням одиниць виміру. При розв'язку системи рівнянь доцільно скористатися відомими методами спрощення розрахунку визначників (наприклад, винесення за знак визначника загального множника і ін.; а іноді і ще простіше – методом підстановки).

5. Проміжні та кінцеві результати розрахунків повинні бути чітко виділені із загального тексту.

6. Рішення задач не слід перевантажувати приведенням всіх алгебраїчних перетворень і арифметичних розрахунків.

7. Для елементів електричних схем рекомендується користуватися позначеннями, застосовуваними в підручниках з електротехніки та унормованими ДСТУ.

8. Кожному етапу розв'язання задачі потрібно давати пояснення.

9. При побудові кривих вибрати такий масштаб, щоб на 1 см осі координат доводилося $1 \cdot 10^{\pm n}$ або $2 \cdot 10^{\pm n}$ одиниць виміру фізичної величини,

де n – ціле число. Градування осей виконувати, починаючи з нуля, рівномірно через один або через два сантиметри. Числові значення координат точок, за якими будуються криві, не приводити. Весь графік в цілому і окремі криві на ньому повинні мати назви (позначення).

1 Основні визначення. Закони комутації.

Перехідний процес – процес переходу кола від одного усталеного режиму роботи до іншого, який виникає при різного роду комутаціях: підключення, відключення, перемикання кола або його елементів, а також при аварійних змінах параметрів кола.

Перехідні процеси виникають в колах, які мають накопичувачі енергії: котушки індуктивності та конденсатори. Ці елементи мають властивості накопичувати і віддавати енергію магнітного та електричного полів.

Кожному сталому режиму відповідає певний запас магнітної і електричної енергії. При переході до нового усталеного режиму енергетичний стан має змінитися. Оскільки індуктивні котушки і конденсатори є інерційними елементами, зміна рівнів енергії електричного або магнітного поля в них не може відбутися миттєво. Тому виникає перехідний процес (рис.1.1), тривалість якого визначається конфігурацією і параметрами електричного кола.

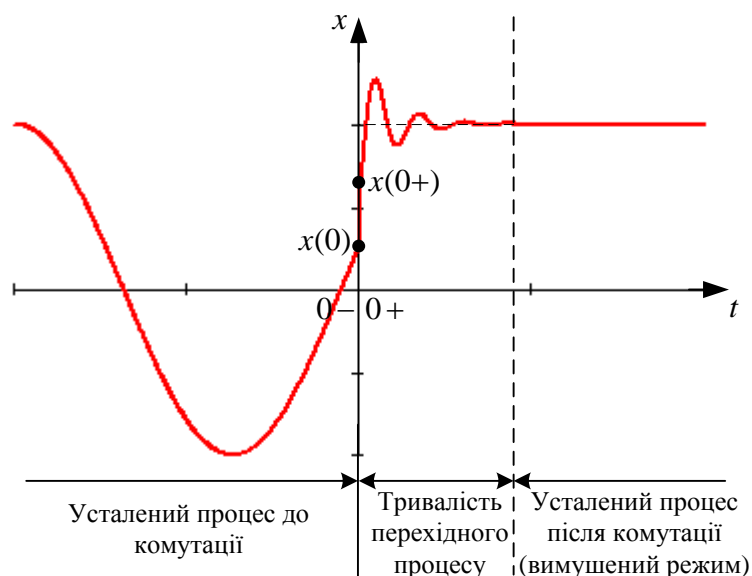


Рисунок 1.1

Момент комутації визначає початок перехідного процесу, при цьому розрізняють час безпосередньо перед комутацією $t(0_-)$ та відразу після комутації $t(0_+)$.

У ланцюгах без накопичувачів енергії перехідний процес відсутній: після спрацьовування комутатора ($t=0$) в ланцюзі відразу ж виникає сталий (усталений) режим.

Перехідний процес може виникати і без комутації, якщо на ланцюг впливають імпульсні сигнали.

Для спрощення запису в формулах момент часу відразу після комутації будемо позначати просто: $t=0$.

В основу розрахунку перехідних процесів покладені інтегродиференціальні рівняння кола та закони комутації, за допомогою яких визначаються струми, потокозчеплення в котушках індуктивності і напруга, заряди на конденсаторах в момент часу $t=0$.

Перший закон комутації: В будь-якій гілці з котушкою індуктивності потокозчеплення і струм в момент комутації не можуть змінитися стрибком, а починають змінюватися від тих значень, які вони мали в момент часу, що безпосередньо передує комутації:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+); \psi_L(0_-) = \psi_L(0_+).$$

Другий закон комутації: Заряд і напруга на конденсаторі в момент комутації не можуть змінитися стрибком, а починають змінюватися від тих значень, які вони мали в момент часу, що безпосередньо передує комутації:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+); q_C(0_-) = q_C(0_+).$$

При аналізі перехідних процесів для схеми після комутації складаються рівняння за законами Кірхгофа для миттєвих значень струмів і напруг.

Враховуючи, що $u_R = R \cdot i$, $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$, $u_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$, ці рівняння являють собою лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами. Рішення

диференціальних рівнянь, як відомо, може здійснюватися різними методами; найбільш поширеними методами є класичний і операторний методи.

2 Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Назва методу «класичний» відображає використання в ньому методів класичної математики для розв'язку диференціальних рівнянь з постійними параметрами.

Класичний метод аналізу перехідних процесів заснований на безпосередньому інтегруванні системи неоднорідних інтегродиференціальних рівнянь, що описують цей ланцюг в після комутаційному режимі. Рівняння складаються для миттєвих значень струмів і напруг на підставі законів Кірхгофа, методів контурних струмів або вузлових потенціалів і вирішуються щодо однієї із змінних (струму, напруги).

Розв'язок отриманого диференціального рівняння n -го порядку, де n дорівнює числу необ'єднаних накопичувачів енергії, подається сумою: часткового розв'язку неоднорідного диференціального рівняння і загального розв'язку однорідного диференціального рівняння.

Складові струмів і напруг, що визначаються частковим розв'язком, яке обумовлене вимушеним впливом джерел, називають усталеними або вимушеними складовими $i_y(t)$, $u_y(t)$. Ці складові відсутні, коли немає зовнішнього впливу.

Складові струмів і напруг, що визначаються спільним рішенням, обумовлені енергією, пов'язаною з накопичувачами. Ці складові називають вільними $i_e(t)$, $u_e(t)$.

Таким чином, в класичному методі розв'язок для кожного перехідного струму або напруги визначається сумою вимушеної і вільної складових:

$$i(t) = i_y(t) + i_e(t), \quad u(t) = u_y(t) + u_e(t).$$

Усталена або вимушена складова знаходиться з розрахунку усталеного режиму ланцюга після комутації і залежить від закону зміни джерела.

Вільна складова описує процес в схемі без джерел і саме тому називається вільною. Вільна складова обумовлена тим, що енергія елементів L і C в момент комутації не може змінитися стрибком; її поступова зміна і викликає перехідний процес.

У розрахунку перехідних процесів класичним методом можна виділити наступні основні етапи:

1. Визначення початкових умов для шуканих величин.
2. Визначення усталених (вимушених) складових.
3. Складання характеристичного рівняння, розрахунок його коренів, подання вільних складових відповідними співвідношеннями через постійні інтегрування.
4. Визначення постійних інтегрування.

Розглянемо ці етапи детально.

2.1 Визначення початкових умов

Початковими умовами називають значення струмів, напруг і їх похідних в момент часу безпосередньо після комутації, при $t=0+$.

Початкові умови ділять на **незалежні** і **залежні**.

Незалежні початкові умови (НПУ) - це значення струмів індуктивних елементів $i_L(0)$ і напруг ємнісних елементів $u_C(0)$ для часу $t=0+$. Незалежні початкові умови визначаються із розрахунку ще нескомутованого кола при врахуванні законів комутації. Вони можуть мати нульові і відмінні від нуля значення.

Залежні початкові умови (ЗПУ) - це значення всіх інших струмів, напруг і похідних за часом струмів і напруг для часу $t=0+$.

Залежні початкові умови визначають:

- після того, як розраховані незалежні початкові умови;

- з рівнянь за законами Кірхгофа для схеми після комутації, записаних для часу $t=0+$; в ці рівняння НПУ входять уже як відомі величини.

Кількість початкових умов, які потрібно розрахувати, дорівнює кількості постійних інтегрування у виразах перехідної величини. Якщо в схемі один реактивний елемент (диференціальні рівняння першого порядку), то у вираз вільного струму або напруги входить одна невідома постійна інтегрування; для її визначення попередньо розраховується тільки одна початкова умова: значення самої функції $x(0)$.

Якщо в схемі два реактивних елементи (диференціальні рівняння другого порядку), то для визначення постійних інтегрування попередньо розраховують дві початкові умови: значення самої функції $x(0)$ і її першої похідної $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0}$ (для моменту часу $t=0+$).

2.2 Визначення усталених (вимушених) складових

Усталені складові (тобто струми і напруги після закінчення перехідного процесу) визначаються видом джерела. У разі постійного джерела електричне коло після закінчення перехідного процесу (у вимушеному режимі) розраховується як коло постійного струму, при цьому враховується, що при постійному струмі опір ділянки з індуктивністю $x_L=0$, а опір ділянки з ємністю $x_C=\infty$.

Якщо ЕРС джерела має синусоїдний закон зміни, то спочатку знаходять комплексні значення шуканих струмів і напруг $\dot{I} = I_y \cdot e^{j\varphi}$, $\dot{U} = U_y \cdot e^{j\psi}$, які потім записують у миттєвій формі $i_y(t) = I_{my} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, $u_y(t) = U_{my} \cdot \sin(\omega t + \psi)$.

2.3 Складання характеристичного рівняння

Характеристичне рівняння можна скласти різними способами; наприклад, воно може бути отримано з системи рівнянь, складених на підставі законів Кірхгофа або методом контурних струмів.

Але найбільш простим є спосіб, суть якого полягає в наступному:

- записують вираз вхідного опору на змінному струмі щодо точок розриву будь-якої гілки в схемі після комутації $Z_{ex}(j\omega)$ (при цьому індуктивний опір враховують як $j\omega L$, а ємнісний – як $1/j\omega C$);

- замінюють в ньому $j\omega$ на p і отримують $Z_{ex}(p)$;

- отриманий вираз прирівнюють до нуля і визначають корені характеристичного рівняння p .

Для прискорення запису характеристичного рівняння зазвичай відразу в післякомутаційній схемі замінюють L на Lp , C на $1/pC$ і записують $Z_{ex}(p)$ як для резистивного кола.

Закон зміни вільної складової перехідного струму або напруги залежить від кількості і виду коренів характеристичного рівняння. Запис виразів вільних складових в залежності від виду коренів характеристичного рівняння приведено в таблиці 2.1, в цих виразах A_1 , A_2 , A , γ – невідомі постійні інтегрування.

Таблиця 2.1 - Характер вільної складової

Кількість і вид коренів характеристичного рівняння	Вираз для вільних складових	Характер перехідного процесу
один дійсний корінь $p < 0$	$x_{ex}(t) = A \cdot e^{p \cdot t}$	аперіодичний
два різних дійсних кореня $p_1 < 0, p_2 < 0$	$x_{ex}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$	аперіодичний
два рівних дійсних кореня $p_1 = p_2 = p, p < 0$	$x_{ex}(t) = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{p \cdot t}$	граничний аперіодичний (критичний)
два комплексно-спряжених коренів	$x_{ex}(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t + \gamma)$	коливальний згасаючий

визначається виразом $\frac{dx_y(t)}{dt} = \omega \cdot x_y \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Для моменту часу $t = 0$

$$\left. \frac{dx_y(t)}{dt} \right|_{t=0} = \omega \cdot x_y \cdot \cos \varphi; \quad i_y(0) = x_y \sin \varphi.$$

У таблиці 2.2 наведені вирази для перехідних струмів або напруг і їх перших похідних для випадку перехідного процесу в схемах постійного струму. Рівняння для розрахунку постійних інтегрування наведені в останньому стовпчику таблиці, їх отримують, якщо в вирази перехідної величини і першої похідної підставити $t=0$.

2.5 Алгоритм розрахунку перехідного процесу класичним методом

З урахуванням розглянутих вище рекомендацій можна запропонувати таку черговість розрахунку перехідного процесу:

- 1) Зі схеми до комутації знайти незалежні початкові умови;
- 2) Для схеми після комутації скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа для миттєвих значень.
- 3) З цих рівнянь, записаних для часу $t=0$, знайти залежні початкові умови;

а) Для схем з двома реактивними елементами необхідно знайти значення похідних при $t=0$ шляхом диференціювання рівнянь за законами Кірхгофа (п. 2), додатково враховуючи:

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L}, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C}.$$

4) Знайти усталені складові шуканих величин шляхом розрахунку усталеного режиму в схемі після комутації;

5) Для знаходження вільної складової шуканої величини:

- а) скласти характеристичне рівняння;
- б) знайти його корені;
- в) записати вираз для вільної складової (таблиця 2.1).

6) Записати повне рішення для шуканої величини як суму усталеної і вільної складової.

7) розрахувати постійні інтегрування, підставивши знайдені початкові умови в вирази для шуканої величини і її $(n-1)$ похідну (де n - порядок характеристичного рівняння) при $t=0$ (таблиця 2.2).

8) Підсумовуючи розраховані усталену і вільну складову, записати рішення для шуканої величини.

Примітка:

З метою спрощення розрахунків найбільш доцільно в якості першої шуканої величини вибирати струм через індуктивність або напругу на ємності. Всі інші невідомі перехідні струми і напруги досить легко визначаються потім з рівнянь Кірхгофа і рівнянь зв'язку між напругами і струмами.

Таблиця 2.2 Рівняння для розрахунку постійних інтегрування

Вирази для перехідних струмів та напруг	Необхідні початкові умови	Вирази першої похідної для перехідних струмів та напруг, які використовуються для розрахунку постійних інтегрування	Рівняння для розрахунку постійних інтегрування
$x(t) = x_y(t) + x_e(t) =$ $= x_y(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$	$x(0);$ $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0}$	$\frac{dx(t)}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$	$\begin{cases} A_1 + A_2 = x(0) - x_y(0) \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0} \end{cases}$
$x(t) = x_y(t) + x_e(t) =$ $= x_y(t) + (A_1 + A_2 t) e^{pt}$	$x(0);$ $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0}$	$\frac{dx(t)}{dt} = A_2 e^{pt} + (A_1 + A_2 t) p e^{pt}$	$\begin{cases} A_1 = x(0) - x_y(0) \\ A_1 p + A_2 = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0} \end{cases}$
$x(t) = x_y(t) + x_e(t) =$ $= x_y(t) + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \gamma)$	$x(0);$ $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0}$	$\frac{dx(t)}{dt} = A e^{-\delta t} [\omega \cos(\omega t + \gamma) - \delta \sin(\omega t + \gamma)]$	$\begin{cases} A \sin \gamma = x(0) - x_y(0) \\ \omega A \cos \gamma - \delta A \sin \gamma = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0} \end{cases}$

2.6 Приклади розрахунку класичним методом перехідного процесу в електричних колах з двома реактивними елементами

2.6.1 Аперіодичний режим в колах з джерелами постійної напруги

Умова завдання: знайти струми у всіх гілках схеми, приведеної на рис.2.1, та напруги на реактивних елементах після замикання ключа.

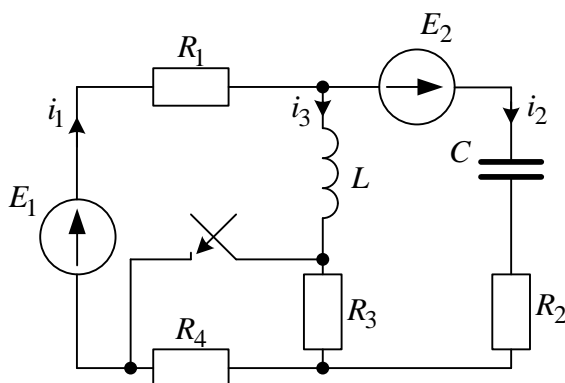


Рисунок 2.1

Вихідні дані:

$$E_1 = 100 \text{ В}$$

$$E_2 = 60 \text{ В}$$

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$$

$$L = 1 \text{ Гн}$$

$$C = 400 \text{ мкФ}$$

Розв'язок

1. Усталений режим до комутації. Визначимо незалежні початкові умови (рис.2.2).

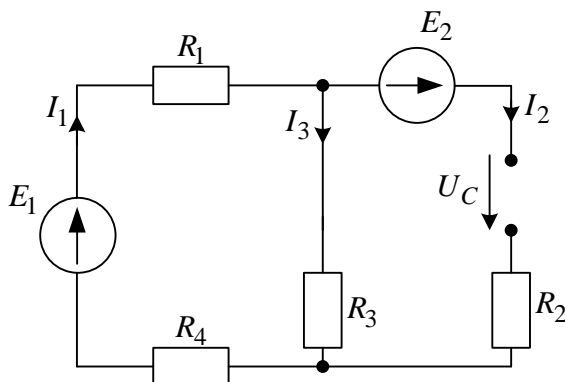


Рисунок 2.2

$$I_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{100}{10 + 20 + 20} = 2 \text{ А}$$

$$U_C = I_3 R_3 + E_2 = 2 \cdot 20 + 60 = 100 \text{ В}$$

Враховуючи закони комутації, запишемо незалежні початкові умови (НПУ):

$$i_3(0) = i_3(0_-) = I_3 = 2 \text{ A}$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = U_C = 100 \text{ B}$$

2. Для схеми після комутації складаємо систему рівнянь за законами Кірхгофа для часу $t=0$ (рис. 2.3):

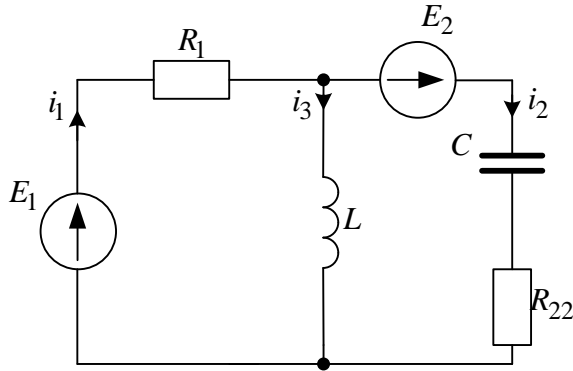


Рисунок 2.3

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0)R_1 + u_L(0) = E_1 \\ i_1(0)R_1 + u_C(0) + i_2(0)R_{22} = E_1 + E_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

де
$$R_{22} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 10 + \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 20 \text{ Ом}$$

3. Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.1), враховуючи $i_3(0) = 2 \text{ A}$, $u_C(0) = 100 \text{ B}$:

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - 2 = 0 \\ i_1(0) \cdot 10 + u_L(0) = 100 \\ i_1(0) \cdot 10 + 100 + i_2(0) \cdot 20 = 100 + 60 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо залежні початкові умови:

$$i_1(0) = 3.33 \text{ A}; i_2(0) = 1.33 \text{ A}; u_L(0) = 66.73 \text{ B}$$

3 а. Продиференціюємо систему рівнянь (2.1) і врахуємо $t = 0$:

$$\begin{cases} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} \cdot R_1 + \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} \cdot R_1 + \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} \cdot R_{22} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Визначимо: $\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{66.73}{1} = 66.73 \frac{A}{c}$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{1.33}{400 \cdot 10^{-6}} = 3325 \frac{B}{c}.$$

Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.2) та знайдемо невідомі значення похідних при $t = 0$:

$$\begin{cases} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} - 66.73 = 0 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} \cdot 10 + \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} \cdot 10 + 3325 + \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} \cdot 20 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо:

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -66.34 \frac{A}{c}; \quad \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = -133 \frac{A}{c}; \quad \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = 663.5 \frac{B}{c}.$$

4. Знайдемо усталені складові шуканих величин шляхом розрахунку усталеного режиму в схемі після комутації (рис.2.4).

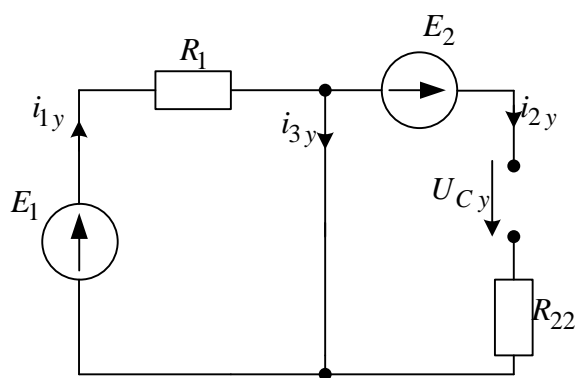


Рисунок 2.4

$$i_{1y} = i_{3y} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

$$i_{2y} = 0$$

$$u_{Cy} = E_2 = 60 \text{ B}$$

$$u_{Ly} = 0$$

5. Складаємо характеристичне рівняння. Характеристичне рівняння кола можна отримати, якщо записати в залежності від p вхідний опір кола (після виключення джерел) відносно точок розриву будь-якої з гілок. Так, відносно точок розриву гілки з конденсатором (рис. 2.5):

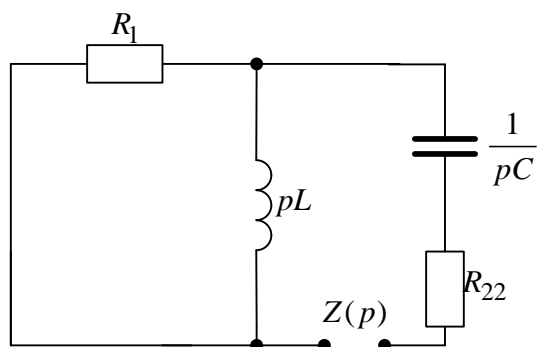


Рисунок 2.5

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + R_{22} + \frac{R_1 pL}{R_1 + pL},$$

отриманий вираз прирівнюємо до нуля $Z(p) = 0$ та підставляємо відомі значення. Маємо:

$$\frac{1}{p400 \cdot 10^{-6}} + 20 + \frac{10 \cdot p}{10 + p} = 0, \quad \frac{30p^2 + 2700p + 25000}{p^2 + 10p} = 0.$$

Отримуємо характеристичне рівняння:

$$30p^2 + 2700p + 25000 = 0.$$

Визначаємо корені характеристичного рівняння p_1 та p_2 :
 $p_1 = -10.5 \text{ c}^{-1}$; $p_2 = -79.5 \text{ c}^{-1}$. Отже, має місце аперіодичний перехідний процес.

6. Запишемо повні рішення для шуканих величини як суму усталеної і вільної складових (таблиця 2.1):

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_{1y} + A_1 e^{-10.5t} + A_2 e^{-79.5t} \\ i_2(t) &= i_{2y} + A_3 e^{-10.5t} + A_4 e^{-79.5t} \\ i_3(t) &= i_{3y} + A_5 e^{-10.5t} + A_6 e^{-79.5t} \\ u_C(t) &= u_{Cy} + B_1 e^{-10.5t} + B_2 e^{-79.5t} \\ u_L(t) &= u_{Ly} + B_3 e^{-10.5t} + B_4 e^{-79.5t}. \end{aligned}$$

7. Розрахуємо постійні інтегрування $A_1 \dots A_6$, $B_1 \dots B_4$. Для їх розрахунку, потрібно підставити знайдені початкові умови в вирази для шуканої величини і її похідної при $t = 0$ (таблиця 2.2).

Визначимо постійні інтегрування для струму $i_1(t)$:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = i_1(0) - i_{1y} \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}.$$

Значення початкових умов $i_1(0) = 3.33$ вибираємо із п. 3, похідну $\left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = -66.34$ із п. 3 а; усталену складову $i_{1y} = 10$ із п. 4, корені характеристичного рівняння $p_1 = -10.5$, $p_2 = -79.5$ із п. 5. Після підстановки, отримаємо

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3.33 - 10 \\ A_1 \cdot (-10.5) + A_2 \cdot (-79.5) = -66.34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -8.64 \\ A_2 = 1.97 \end{cases}$$

Постійні інтегрування для інших струмів та напруг знаходимо аналогічно.

8. Підсумовуючи розраховані усталену і вільну складову, запишемо рішення для шуканих величин

$$i_1(t) = 10 - 8.64e^{-10.5t} + 1.97e^{-79.5t}$$

$$i_2(t) = -0.39e^{-10.5t} + 1.72e^{-79.5t}$$

$$i_3(t) = 10 - 8.25e^{-10.5t} + 0.25e^{-79.5t}$$

$$u_C(t) = 60 + 94e^{-10.5t} - 54e^{-79.5t}$$

$$u_L(t) = 86.6e^{-10.5t} - 19.87e^{-79.5t}.$$

Для перевірки. можна скористатися відомими співвідношеннями та законами, наприклад

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_3}{dt}$$

$$u_C(t) = E_1 + E_2 - i_1(t)R_1 - i_2(t)R_{22}.$$

2.6.2 Побудова графіка зміни перехідного струму при аперіодичному режимі

Приймаючи до уваги, що в досліджуваному електричному колі діють джерела постійної напруги, вимушені складові струмів не будуть залежати від часу. Тому форма кривих перехідних струмів (напруг) визначаються тільки вільними складовими. Закон зміни вільних складових (аперіодичний чи коливальний) залежить від коренів характеристичного рівняння вільного процесу.

Розглянемо варіант, коли корені характеристичного рівняння. дійсні:

$$i_1(t) = 10 - 8.64e^{-10.5t} + 1.97e^{-79.5t}$$

Визначаємось спочатку з інтервалом часу, для якого необхідно виконати розрахунки струму $i_1(t)$. Хоч теоретично перехідний процес існує нескінченно довго, для побудови графіка досить взяти проміжок часу

$$T = \frac{(4 \div 5)}{|p_{\min}|} \text{ сек. Тут } |p_{\min}| - \text{мінімальний по абсолютному значенню корінь}$$

характеристичного рівняння. В нашому випадку $|p_{\min}| = 10.5$, тоді $T = 0.38 \div 0.48$ сек.

Далі вибираємо часовий крок Δt , який визначить кількість дискретних значень струму у фіксовані моменти часу на інтервалі $0 \leq t \leq T$. Чим менший крок Δt , тим більше буде отримано значень струму для побудови графіка. Щоб графік досліджуваної функції відображав її часові особливості, необхідно на інтервалі часу $0 \div T$ отримати $15 \div 20$ розрахункових значень $i_1(t)$.

Графік перехідного струму показаний на рис. 2.6. Цим графіком ілюструється монотонність зміни перехідного струму в аперіодичному режимі: досліджувана функція струму поступово наближається до усталеної (вимушеної) складової i_{1y} , яка вказана на рис. 2.6 пунктирною лінією.

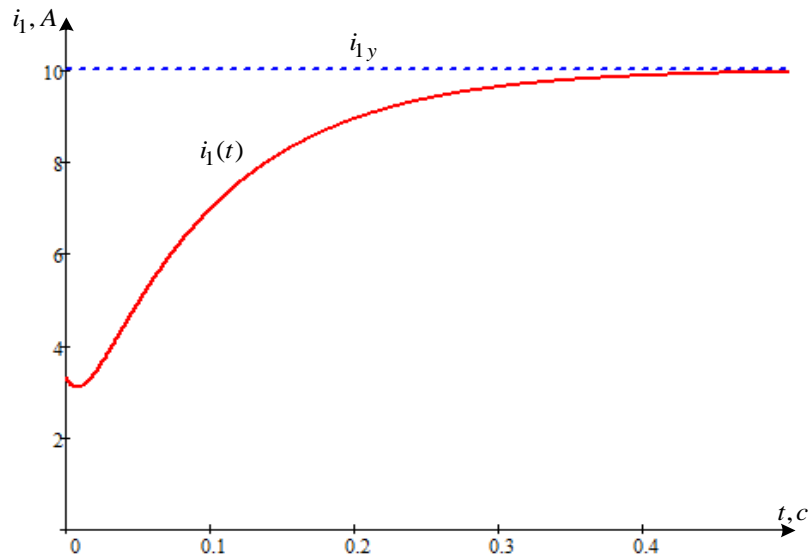


Рисунок 2.6

2.6.3 Коливальний режим в колах з джерелами постійної напруги

Умова завдання: знайти струми у всіх гілках схеми, приведеної на рис.2.1, та напруги на реактивних елементах після замикання ключа.

Вихідні дані: $E_1 = 100 \text{ В}$; $E_2 = 60 \text{ В}$; $R_1 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$;
 $R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$; $L = 1 \text{ Гн}$; $C = 400 \text{ мкФ}$.

Розв'язок

1. Усталений режим до комутації. Визначимо незалежні початкові умови (рис.2.2).

$$I_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{100}{100 + 20 + 20} = 0.714 \text{ А}$$

$$U_C = I_3 R_3 + E_2 = 0.714 \cdot 20 + 60 = 74.29 \text{ В}$$

Враховуючи закони комутації запишемо незалежні початкові умови (НПУ):

$$i_3(0) = i_3(0_-) = I_3 = 0.714 \text{ А}$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = U_C = 74.29 \text{ В}.$$

2. Складемо для схеми після комутації систему рівнянь за законами Кірхгофа для часу $t = 0$ (рис.2.3):

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0)R_1 + u_L(0) = E_1 \\ i_1(0)R_1 + u_C(0) + i_2(0)R_{22} = E_1 + E_2. \end{cases}$$

3. Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.1), враховуючи $i_3(0) = 0.714 \text{ A}$, $u_C(0) = 74.29 \text{ B}$

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - 0.714 = 0 \\ i_1(0) \cdot 100 + u_L(0) = 100 \\ i_1(0) \cdot 100 + 74.29 + i_2(0) \cdot 20 = 100 + 60 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо залежні початкові умови:

$$i_1(0) = 0.833 \text{ A}; i_2(0) = 0.119 \text{ A}; u_L(0) = 16.67 \text{ B}$$

3 а. Продиференціюємо систему рівнянь (2.1) при $t = 0$, отримуємо систему (2.2).

$$\begin{aligned} \text{Визначимо } \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{u_L(0)}{L} = \frac{16.67}{1} = 16.67 \frac{\text{A}}{\text{с}} \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{i_2(0)}{C} = \frac{0.119}{400 \cdot 10^{-6}} = 298.125 \frac{\text{B}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Підставимо відомі значення у систему рівнянь (2.2) та знайдемо невідомі значення похідних при $t = 0$; розв'язавши систему, отримаємо:

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = 0.295 \frac{\text{A}}{\text{с}}; \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = -16.38 \frac{\text{A}}{\text{с}}; \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = -29.479 \frac{\text{B}}{\text{с}}.$$

4. Знайдемо усталені складові шуканих величин шляхом розрахунку усталеного режиму в схемі після комутації (рис.2.4).

$$i_{1y} = i_{3y} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{100}{100} = 1 \text{ A};$$

$$u_{Cy} = E_2 = 60 \text{ B}$$

$$u_{Cy} = E_2 = 60 \text{ В}, i_{2y} = 0, u_{Ly} = 0$$

5. Складаємо характеристичне рівняння:

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + R_{22} + \frac{R_1 pL}{R_1 + pL};$$

отримуємо вираз

$$1.2p^2 + 45p + 2500 = 0.$$

Визначаємо корені характеристичного рівняння:

$$p_{1,2} = -18.7 \pm j41.6 = -\delta \pm j\omega,$$

отже, має місце коливальний перехідний процес.

6. Запишемо повні рішення для шуканих величин як суму усталеної і вільної складових (таблиця 2.1):

$$i_1(t) = i_{1y} + A_1 e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t + \gamma_1),$$

$$i_2(t) = i_{2y} + A_2 e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t + \gamma_2),$$

$$i_3(t) = i_{3y} + A_3 e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t + \gamma_3),$$

$$u_C(t) = u_{Cy} + B_1 e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$u_L(t) = u_{Ly} + B_2 e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

7. Розрахуємо постійні інтегрування A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 . Для їх знаходження, потрібно підставити знайдені початкові умови в вирази для шуканої величини і її похідної при $t = 0$ (таблиця 2.2).

Визначимо постійні інтегрування для струму $i_1(t)$:

$$\begin{cases} A_1 \sin \gamma = i_1(0) - i_{1y} \\ \omega A_1 \cos \gamma_1 + \delta A_1 \sin \gamma_1 = \left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0} \end{cases}$$

Після підстановки, отримаємо

$$\begin{cases} A_1 \sin \gamma_1 = 0.833 - 1 \\ 41.6 \cdot A_1 \cos \gamma_1 - 18.7 \cdot A_1 \sin \gamma_1 = 0.295 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \sin \gamma_1 = -0.167 \\ 41.6 \cdot A_1 \cos \gamma_1 - 18.7 \cdot (-0.167) = 0.295 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 \sin \gamma_1 = -0.167 \\ A_1 \cos \gamma_1 = -0.068 \end{cases}$$

звідки:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{A_1 \sin \gamma_1}{A_1 \cos \gamma_1} = 2.457.$$

Так як значення $\operatorname{tg} \gamma_1$ знаходиться у третій чверті, то $\gamma_1 = \operatorname{arctg}(2.457) \pm 180^\circ = 67.9^\circ \pm 180^\circ = 247.9^\circ$, або $\gamma_1 = -112.1^\circ$.

$$A_1 = \frac{-0.167}{\sin \gamma_1} = \frac{-0.167}{\sin(-112.1^\circ)} = 0.18.$$

Постійні інтегрування для інших струмів знаходимо аналогічно.

Визначимо постійні інтегрування для напруги $u_C(t)$:

$$\begin{cases} B_1 \sin \varphi_1 = 74.29 - 60 \\ 41.6 \cdot B_1 \cos \varphi_1 - 18.7 \cdot B_1 \sin \varphi_1 = 298.125 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 \sin \varphi_1 = 14.29 \\ 41.6 \cdot B_1 \cos \varphi_1 - 18.7 \cdot 14.29 = 298.125 \end{cases} \quad \begin{cases} B_1 \sin \varphi_1 = 14.29 \\ B_1 \cos \varphi_1 = 13.59 \end{cases}$$

звідки:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 1.052, \quad \varphi_1 = 46.438^\circ.$$

$$B_1 = \frac{14.29}{\sin(46.438^\circ)} = 19.72.$$

Визначимо постійні інтегрування для напруги $u_L(t)$:

$$\begin{cases} B_2 \sin \varphi_2 = 16.67 \\ 41.6 \cdot B_2 \cos \varphi_2 - 18.7 \cdot B_2 \sin \varphi_2 = -29.479 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_2 \sin \varphi_2 = 16.67 \\ 41.6 \cdot B_2 \cos \varphi_2 - 18.7 \cdot 16.67 = -29.479 \end{cases} \quad \begin{cases} B_2 \sin \varphi_2 = 16.67 \\ B_2 \cos \varphi_2 = 6.785 \end{cases}$$

звідки:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 2.457, \varphi_2 = 67.85^\circ.$$

$$B_2 = \frac{16.67}{\sin(67.85^\circ)} = 18$$

8. Підсумовуючи розраховані усталену і вільну складову запишемо рішення для шуканих величин

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 1 + 0.18e^{-18.7 \cdot t} \sin(41.6t - 112.1^\circ), \\ i_2(t) &= -0.36e^{-18.7 \cdot t} \sin(41.6t - 19.3^\circ), \\ i_3(t) &= 1 + 0.395e^{-18.7 \cdot t} \sin(41.6t - 46.4^\circ), \\ u_C(t) &= 60 + 19.72e^{-18.7 \cdot t} \sin(41.6t + 46.438^\circ), \\ u_L(t) &= 18e^{-18.7 \cdot t} \sin(41.6t + 67.85^\circ). \end{aligned}$$

2.6.4 Побудова графіка зміни перехідного струму при коливальному режимі

У випадку коливального процесу струм або напруга в загальному вигляді запишуться рівнянням:

$$x(t) = x_y + Ae^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t + \gamma), \quad (2.3)$$

де δ, ω – складові комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$.

Швидкість згасання вільної складової рівняння (2.3) залежить від показника δ . Тому при побудові графіка перехідної функції для коливального процесу розрахунковий проміжок часу T визначають із співвідношення $T = \frac{4 \div 5}{\delta}$, сек. Виходячи з того, що для побудови якісного часового графіка досліджуваної функції на інтервалі $0 \leq t \leq T$ необхідно мати (15-20) дискретних значень $f(t)$, крок Δt при розрахунках повинен становити:

$$\Delta t = \frac{4 \div 5}{(15 \div 20)\delta} = \frac{0.25 \div 0.3}{\delta} (\text{сек})$$

Розглянемо побудову часового графіка для струму. закон зміни якого визначається рівнянням:

$$i(t) = 1 + 0.18e^{-18.7t} \sin(41.6t - 112.1^\circ)$$

Графік перехідного струму $i_1(t)$ зображено на рис. 2.7. Як видно із графіка, струм у цьому перехідному режимі коливається відносно свого усталеного значення $i_{1y} = 1A$, наближаючись до нього із зростанням часу.

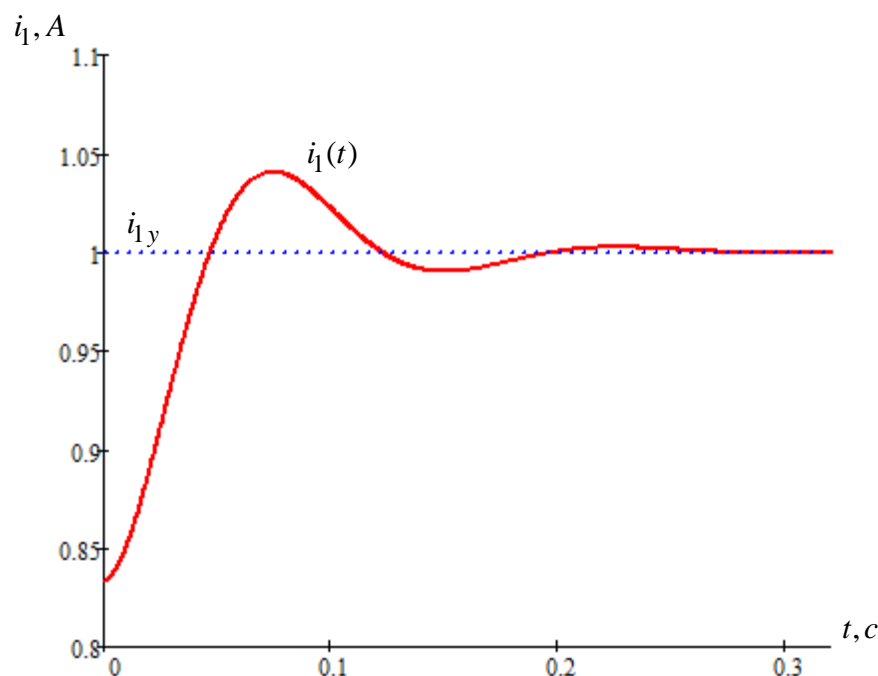


Рисунок 2.7

3 Розрахунок початкових умов в колі з джерелами синусоїдної напруги

В цьому розділі передбачається розрахунок струмів у гілках і напруг на реактивних елементах при $t=0$, якщо в колі діють джерела синусоїдної напруги, тобто визначення струму в котушці індуктивності і напруги на конденсаторі (рис. 3.1).

Рекомендується наступний порядок розв'язку.

1. Розрахувати миттєві струми в індуктивностях та напруги на конденсаторах до комутації.
2. Підставивши в ці значення $t=0$ та скориставшись законами комутації, знайти незалежні початкові умови.
3. Визначити залежні початкові умови із системи рівнянь, складених для після комутаційної схеми, в які підставляють $t=0$.

Приклад розрахунку

Дано коло з джерелами синусоїдної напруги (рис. 3.1).

Вихідні дані:

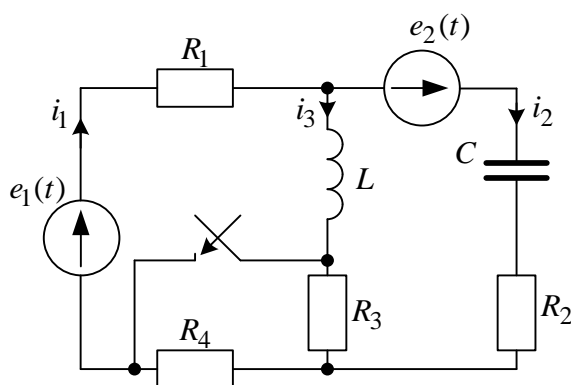


Рисунок 3.1

$$e_1(t) = 100\sqrt{2} \sin(200t + 30^\circ) \text{ В}$$

$$e_2(t) = 60\sqrt{2} \sin(200t + 30^\circ) \text{ В}$$

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$$

$$L = 1 \text{ Гн}$$

$$C = 400 \text{ мкФ}$$

Розв'язок

Розраховуємо схему до комутації в комплексній формі методом контурних струмів при запису рівнянь в комплексній формі:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(0_-) \cdot (R_1 + j\omega L + R_3 + R_4) - \dot{I}_2(0_-) \cdot (R_3 + j\omega L) &= \dot{E}_1(0_-) \\ -\dot{I}_1(0_-) \cdot (R_3 + j\omega L) + \dot{I}_2(0_-) \cdot \left(R_2 + R_3 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) &= \dot{E}_2(0_-) \end{aligned}$$

Підставляючи числові значення

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(0_-) \cdot 206.15e^{j76^\circ} - \dot{I}_2(0_-) \cdot 201e^{j84.29^\circ} &= 100e^{j30^\circ} \\ -\dot{I}_1(0_-) \cdot 201e^{j84.29^\circ} + \dot{I}_2(0_-) \cdot 189.9e^{j80.9^\circ} &= 60e^{j30^\circ}, \end{aligned}$$

знаходимо визначники:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 206.15e^{j76^\circ} & -201e^{j84.29^\circ} \\ -201e^{j84.29^\circ} & 189.9e^{j80.9^\circ} \end{vmatrix} = 8189.56e^{j63.98^\circ} \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 100e^{j30^\circ} & -201e^{j84.29^\circ} \\ 60e^{j30^\circ} & 189.9e^{j80.9^\circ} \end{vmatrix} = 30113e^{j112.2^\circ} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 206.15e^{j76^\circ} & 100e^{j30^\circ} \\ -201e^{j84.29^\circ} & 60e^{j30^\circ} \end{vmatrix} = 32388.9e^{j111.13^\circ}. \end{aligned}$$

Далі отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(0_-) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3.68e^{j48.23^\circ} \text{ A} \\ \dot{I}_2(0_-) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3.95e^{j47.15^\circ} \text{ A} \\ \dot{I}_3(0_-) &= \dot{I}_1(0_-) - \dot{I}_2(0_-) = 0.29e^{-j146.31^\circ} \text{ A} \\ U_C(0_-) &= \dot{I}_2(0_-) \cdot (-jX_C) = 49.37e^{-j42.85^\circ} \text{ B.} \end{aligned}$$

Миттєве значення струму в індуктивності до комутації:

$$i_L(-) = 0.29 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(200t - 146.31^\circ) \text{ A}$$

та напруги на ємності:

$$u_C(-) = 49.37 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(200t - 42.85^\circ) \text{ B.}$$

Незалежні початкові умови отримуємо, підставивши в останні вирази $t=0$

$$i_L(0) = 0.29 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(-146.31^\circ) = -0.23 \text{ A}$$

$$u_C(0) = 49.37 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(-42.85^\circ) = -47.27 \text{ В.}$$

Система рівнянь для після комутаційної схеми при $t=0$ приймає вигляд:

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) \\ i_1(0) \cdot R_1 + L \frac{di_3}{dt} \Big|_{t=0} = e_1(0) \\ u_C(0) + i_2(0) \cdot \left(R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right) - L \frac{di_3}{dt} \Big|_{t=0} = e_2(0) \end{cases}$$

Підставивши відомі величини, отримуємо:

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) - 0.23 \\ i_1(0) \cdot 10 + L \frac{di_3}{dt} \Big|_{t=0} = 70.5 \\ -47.27 + i_2(0) \cdot 20 - L \frac{di_3}{dt} \Big|_{t=0} = 42.3 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знаходимо залежні початкові умови

$$i_1(0) = 3.83 \text{ А, } i_2(0) = 4.06 \text{ А}$$

$$u_L(0) = L \frac{di_3}{dt} \Big|_{t=0} = 32.2 \text{ В}$$

4 Операторний метод розрахунку перехідних процесів

4.1 Математичні основи методу. Алгоритм розрахунку перехідного процесу операторних методом

Сутність операторного методу аналізу перехідних процесів полягає в тому, що при розрахунках дійсні функції часу $f(t)$, які описують процеси в електричних колах і звані оригіналами, замінюють їх операторними зображеннями $F(p)$ за допомогою прямого перетворення (Інтеграла) Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

де $p = \delta + j\omega$ – комплексне число.

Взаємна відповідність між оригіналом і операторним зображенням скорочено записується за допомогою знака $\circ =^\circ$. Тобто вираз $f(t) \circ =^\circ F(p)$ означає, що оригіналу $f(t)$ відповідає операторне зображення $F(p)$.

Для струму, напруги і ЕРС матимемо:

- оригіналу $u(t)$ відповідає зображення $U(p)$;
- оригіналу $i(t)$ відповідає зображення $I(p)$;
- оригіналу $e(t)$ відповідає зображення $E(p)$.

Використання перетворення Лапласа призводить до заміни операцій диференціювання і інтегрування оригіналів в рівняннях для миттєвих значень на алгебраїчні операції множення і ділення зображень. Внаслідок такої заміни інтегрально-диференціальні рівняння, складені для електричної схеми будь-яким відомим методом, перетворюються в алгебраїчні. Це значною мірою спрощує розрахунок, оскільки замість диференціальних рівнянь для часових функцій, розв'язуються алгебраїчні рівняння для зображень.

Перехід від зображень до оригіналів можна здійснити за формулою оберненого перетворення Лапласа, за довідковими таблицями, по теоремі

розкладання, а також, використовуючи функції оберненого перетворення в різних математичних пакетах, наприклад, в Mathcad.

Алгоритм розрахунку перехідного процесу операторних методом наступний:

1) З розрахунку усталеного режиму електричного кола до комутації визначають незалежні початкові умови $i_L(0)$, $u_C(0)$.

2) Складають операторну схему заміщення електричного кола, враховуючи знайдені в п. 1 початкові умови.

3) З розрахунку операторної схеми найбільш доцільним методом знаходять зображення шуканих струмів і напруг $I(p)$, $U(p)$.

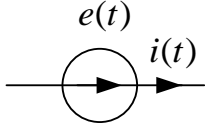
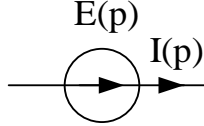
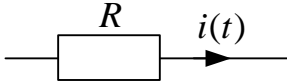
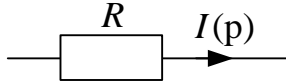

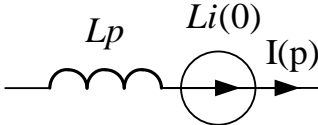
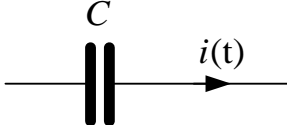
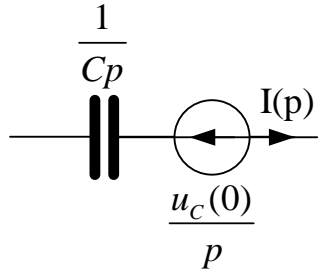
4) Одним із названих раніше способом переходять від зображень шуканих струмів і напруг до їх оригіналів $i(t)$, $u(t)$.

Розглянемо окремі етапи алгоритму докладніше.

4.1.1 Операторна схема заміщення

Операторна схема заміщення будується для кола після комутації, всі струми, напруги і ЕРС в ній замінюються їх операторними зображеннями; вона враховує незалежні початкові умови – струми через котушки індуктивності і напруги на ємностях в момент комутації У вигляді внутрішніх операторних ЕРС цих елементів. При складанні операторної схеми заміщення слід керуватися наступними відповідниками між оригіналами і зображеннями (таблиця 4.1).

Таблиця 4.1 – Елементи електричного кола і їх операторні відповідності

Елемент	Операторне зображення елемента
	
Джерело постійної напруги E	$\frac{E}{p}$
Джерело постійного струму J	$\frac{J}{p}$
Джерело синусоїдної напруги $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$	$E(p) = E_m \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
 $u_R(t) = R \cdot i(t)$	 $U_R(p) = R \cdot I(p)$
 $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$	 $L \cdot i(0)$ – додаткова ЕРС індуктивності $i(0)$ – струм через індуктивність в момент комутації $U_L(p) = Lp \cdot I(p) - L \cdot i(0)$
 $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + u_C(0)$	 $\frac{u_C(0)}{p}$ – додаткова ЕРС $u_C(0)$ – напруга на ємності в момент комутації $U_C(p) = I(p) \frac{1}{C \cdot p} + \frac{u_C(0)}{p}$

Приклад: скласти операторну схему заміщення ділянки кола (рисунок 4.1). Записати операторний опір і напругу на ділянці кола в операторній формі

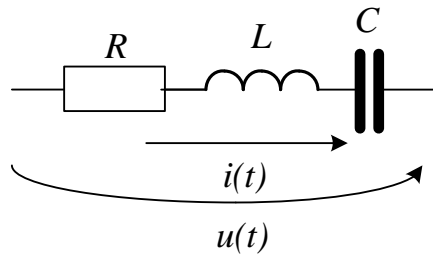


Рисунок 4.1

У відповідності до таблиці 4.1 операторна схема заміщення матиме вигляд:

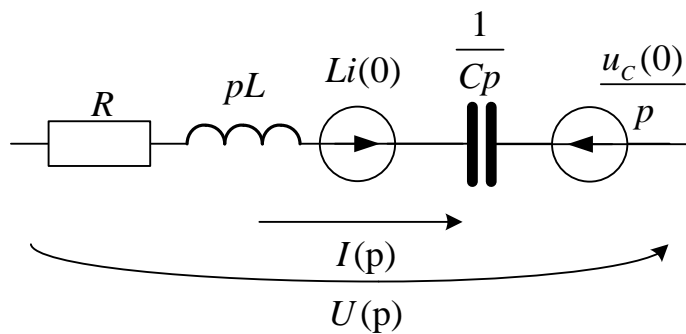


Рисунок 4.2

Операторний опір даної ділянки кола:

$$Z(p) = R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}$$

Прикладена напруга складається з суми напруг на кожному елементі схеми $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$.

Для операторної схеми заміщення

$$\begin{aligned} U(p) &= U_R(p) + U_L(p) + U_C(p) = \\ &= R \cdot I(p) + p \cdot L \cdot I(p) - L \cdot i(0) + \frac{1}{p \cdot C} \cdot I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = \end{aligned}$$

$$= I(p) \cdot \left(R + L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p} \right) - L \cdot i(0) + \frac{u_C(0)}{p},$$

де $i(0)$ та $u_C(0)$ – початкові умови. Якщо, початкові умови рівні нулю, то:

$U(p) = I(p) \cdot Z(p)$ – закон Ома в операторній формі запису.

Закони Кірхгофа в операторній формі запису:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0 \text{ – перший закон Кірхгофа.}$$

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) \cdot Z(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p) \text{ – другий закон Кірхгофа.}$$

4.1.2 Перехід від зображення до оригіналу

Для переходу від зображення до оригіналу можна скористатися

формулою оберненого перетворення Лапласа $f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{\delta_0 - j \cdot \infty}^{\delta_0 + j \cdot \infty} F(p) \cdot e^{p \cdot t} dp$

, чи таблицями відповідності, наведеними в довідниках з вищої математики. Однак найбільш використовуваним способом є перехід від зображень до оригіналів за формулами теореми розкладання.

Як правило, рішення для зображення струму або напруги має вигляд правильного раціонального дробу:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}, \quad (4.1)$$

де $m < n$, причому дріб $\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ не скорочується, а коефіцієнти a_m, b_n – дійсні числа.

Алгоритм переходу від зображення до оригіналу за формулами теореми розкладання наступний.

- 1) Знаменник дробу (4.1) прирівнюють до нуля і знаходять корені p_K рівняння $F_2(p) = 0$.

2) У загальному вигляді знаходять похідну знаменника $F_2'(p)$.

3) В залежності від характеру коренів записують рішення для оригіналу:

- якщо корені дійсні і різні, вид оригіналу

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t} \quad (4.2)$$

- якщо корені комплексно-спряжені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$, то оригінал від комплексно-спряженої пари коренів має вигляд

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t} \right\} \quad (4.3)$$

Залежно від виду коренів оригінал може бути визначений і за іншими виразами теореми розкладання.

4.2. Приклади розрахунку операторним методом перехідного процесу в електричних колах з двома реактивними елементами

4.2.1 Аперіодичний режим в колах з джерелами постійної напруги

Умова завдання: визначити струм у гілці з джерелом ЕРС E_1 (рис.4.3) і напругу на конденсаторі операторним методом.

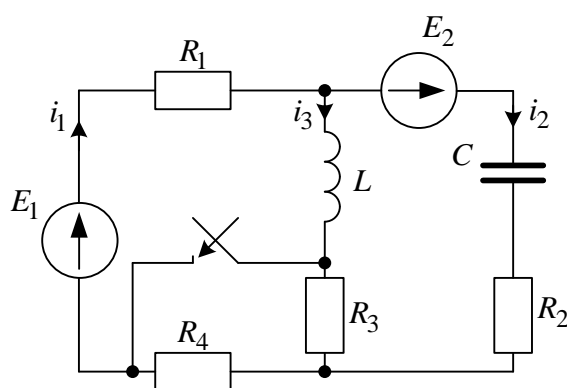


Рисунок 4.3

Вихідні дані:

$$E_1 = 100 \text{ В}$$

$$E_2 = 60 \text{ В}$$

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$$

$$L = 1 \text{ Гн}$$

$$C = 400 \text{ мкФ}$$

Розв'язання

1. Незалежні початкові умови розраховані класичним методом (п.2.6.1)

$$i_3(0) = 2 \text{ A}, \quad u_C(0) = 100 \text{ B}.$$

Визначимо додаткові операторні ЕРС індуктивності та конденсатора:

$$Li_3(0) = 2 \text{ B} \cdot \text{с},$$

$$\frac{u_C(0)}{p} = \frac{100}{p} \text{ B} \cdot \text{с}$$

2. Операторна схема заміщення будується для кола після комутації. У відповідності до таблиці 4.1 еквівалентна операторна схема матиме вигляд:

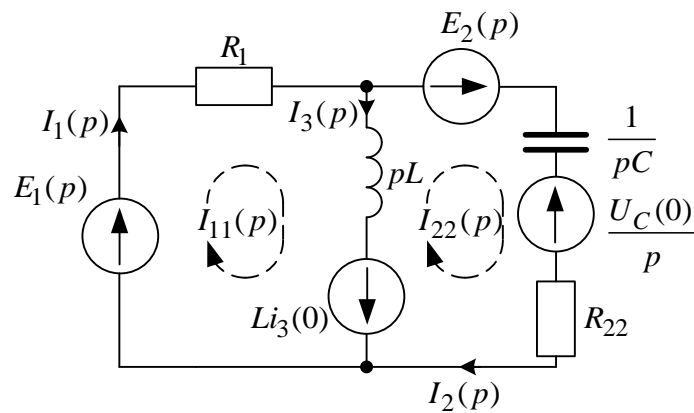


Рисунок 4.4

3. Для схеми рис 4.4 складаємо рівняння методом контурних струмів:

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot (R_1 + pL) - I_{22}(p) \cdot (pL) = \frac{E_1}{p} + Li_3(0) \\ -I_{11}(p) \cdot (pL) + I_{22}(p) \cdot \left(R_{22} + pL + \frac{1}{pC} \right) = \frac{E_2}{p} - \frac{U_C(0)}{p} - Li_3(0) \end{cases} \quad (4.4)$$

Підставивши в рівняння (4.4) числові значення, отримаємо:

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot (10 + p \cdot 1) - I_{22}(p) \cdot p = \frac{100}{p} + 2 \\ -I_{11}(p) \cdot p + I_{22}(p) \cdot \left(20 + p + \frac{2500}{p} \right) = -\frac{40}{p} - 2 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, використовуючи метод Крамера:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 10+p & -p \\ -p \cdot 1 & 20+p+\frac{2500}{p} \end{vmatrix} = \frac{30p^2 + 2700p + 25 \cdot 10^3}{p};$$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} \frac{100}{p} + 2 & -p \\ -\frac{40}{p} - 2 & 20+p+\frac{2500}{p} \end{vmatrix} = \frac{100p^2 + 7000p + 25 \cdot 10^4}{p^2};$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} 10+p & \frac{100}{p} + 2 \\ -p \cdot 1 & -\frac{40}{p} - 2 \end{vmatrix} = \frac{40p - 400}{p}.$$

4. Знайдемо зображення струмів

$$I_1(p) = I_{11}(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{100p^2 + 7000p + 25 \cdot 10^4}{p(30p^2 + 2700p + 25 \cdot 10^3)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

$$I_2(p) = I_{22}(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{40p - 400}{30p^2 + 2700p + 25 \cdot 10^3} = \frac{N_1(p)}{N_2(p)}$$

Зображення напруги на конденсаторі з врахуванням внутрішньої ЕРС:

$$U_C(p) = I_2(p) \cdot \frac{1}{pC} + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{3000p^2 + 3.7 \cdot 10^5 p + 15 \cdot 10^5}{p(30p^2 + 2700p + 25 \cdot 10^3)} = \frac{H_1(p)}{H_2(p)}$$

5. Для того, щоб здійснити зворотне перетворення – перехід до оригіналу $i_1(t)$, використаємо формулу (4.2). Маємо:

$$F_2(p) = p(30p^2 + 2700p + 25 \cdot 10^3) = 0$$

Корені цього рівняння $p_1 = 0$; $p_2 = -10.5 \text{ c}^{-1}$; $p_3 = -79.5 \text{ c}^{-1}$, (p_2 , p_3 співпадають із коренями характеристичного рівняння, приведенного в п. 2.6.1.)

Далі визначаємо похідну знаменника

$$F_2'(p) = \frac{d}{dp} F_2(p) = 90p^2 + 5400p + 25 \cdot 10^3.$$

Знаходимо значення $F_1(p_k)$ та $F_2'(p_k)$:

– при $p_1 = 0$

$$F_1(p_1) = 25 \cdot 10^4, \quad F_2'(p_1) = 25 \cdot 10^3;$$

– при $p_2 = -10.5$

$$F_1(p_2) = 100 \cdot (-10.5)^2 + 7000 \cdot (-10.5) + 25 \cdot 10^4 = 187.5 \cdot 10^3;$$

$$F_2'(p_2) = 90 \cdot (-10.5)^2 + 5400 \cdot (-10.5) + 25 \cdot 10^3 = -21.8 \cdot 10^3;$$

– при $p_3 = -79.5$

$$F_1(p_3) = 100 \cdot (-79.5)^2 + 7000 \cdot (-79.5) + 25 \cdot 10^4 = 325 \cdot 10^3;$$

$$F_2'(p_3) = 90 \cdot (-79.5)^2 + 5400 \cdot (-79.5) + 25 \cdot 10^3 = 164 \cdot 10^3.$$

Підставивши знайдені значення у рівняння (4.2), отримаємо оригінал:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} \cdot e^{p_2 \cdot t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} \cdot e^{p_3 \cdot t} = \\ &= \frac{25 \cdot 10^4}{25 \cdot 10^3} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{187.5 \cdot 10^3}{-21.8 \cdot 10^3} \cdot e^{-10.5 \cdot t} + \frac{325 \cdot 10^3}{164 \cdot 10^3} \cdot e^{-79.5 \cdot t} = \\ &= 10 - 8.64e^{-10.5t} + 1.97e^{-79.5t} \text{ A} \end{aligned}$$

6. Тепер розрахуємо напругу на конденсаторі в перехідному режимі.

Прирівнюємо до нуля і відшукуємо корені $H_2(p)=0$.

$$H_2(p) = p(30p^2 + 2700p + 25 \cdot 10^3) = 0$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -10.5 \text{ c}^{-1}; \quad p_3 = -79.5 \text{ c}^{-1}$$

Похідна від знаменника

$$H_2'(p) = \frac{d}{dp} H_2(p) = 90p^2 + 5400p + 25 \cdot 10^3.$$

Знаходимо значення $H_1(p_k)$ та $H_2'(p_k)$:

– при $p_1 = 0$

$$H_1(p_1) = 15 \cdot 10^5; \quad H'_2(p_1) = 25 \cdot 10^3;$$

– при $p_2 = -10.5$

$$H_1(p_2) = 3000 \cdot (-10.5)^2 + 3.7 \cdot 10^5 \cdot (-10.5) + 15 \cdot 10^5 = -20.5 \cdot 10^5;$$

$$H'_2(p_2) = 90 \cdot (-10.5)^2 + 5400 \cdot (-10.5) + 25 \cdot 10^3 = -21.8 \cdot 10^3;$$

– при $p_3 = -79.5$

$$H_1(p_3) = 3000 \cdot (-79.5)^2 + 3.7 \cdot 10^5 \cdot (-79.5) + 15 \cdot 10^5 = -89.54 \cdot 10^5;$$

$$H'_2(p_3) = 90 \cdot (-79.5)^2 + 5400 \cdot (-79.5) + 25 \cdot 10^3 = 164 \cdot 10^3.$$

Напруга на конденсаторі

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{15 \cdot 10^5}{25 \cdot 10^3} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{-20.5 \cdot 10^5}{-21.8 \cdot 10^3} \cdot e^{-10.5 \cdot t} + \frac{-89.54 \cdot 10^5}{164 \cdot 10^3} \cdot e^{-79.5 \cdot t} = \\ &= 60 + 94e^{-10.5t} - 54e^{-79.5t} \text{ В} \end{aligned}$$

Як бачимо, вирази для перехідного струму у гілці з джерелом ЕРС E_1 і напруги на конденсаторі, підраховані операторним і класичним методами, співпадають. Перевірка отриманих результатів здійснюється також за початковим і кінцевим умовами.

4.2.2 Коливальний режим в колах з джерелами постійної напруги

Умова завдання: визначити струм операторним методом у гілці з джерелом ЕРС E_1 для схеми, приведеної на рис.4.3 операторним методом.

Вихідні дані: $E_1 = 100 \text{ В}; E_2 = 60 \text{ В}; R_1 = 100 \text{ Ом}; R_2 = 10 \text{ Ом};$
 $R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}; L = 1 \text{ Гн}; C = 400 \text{ мкФ}.$

1. Початкові умови (п. 2.6.3)

$$i_3(0) = 0.714 \text{ А}, \quad u_C(0) = 74.29 \text{ В}$$

2. Підставивши значення параметрів і початкових умов в систему (4.3) і розв'язавши рівняння для $I_1(p)$ маємо:

$$I_1(p) = \frac{100p^2 + 3785p + 25 \cdot 10^4}{p(120p^2 + 4500p + 25 \cdot 10^4)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Розв'язавши рівняння

$$F_2(p) = p(120p^2 + 4500p + 25 \cdot 10^4) = 0$$

знаходимо корені $p_1 = 0$; $p_2 = -18.7 + j41.6 \text{ c}^{-1}$; $p_3 = -18.7 - j41.6 \text{ c}^{-1}$.

Корені p_2 і p_3 співпадають із коренями характеристичного рівняння, приведенного в п. 2.6.3.

Далі визначаємо похідну знаменника

$$F_2'(p) = \frac{d}{dp} F_2(p) = 360p^2 + 9000p + 25 \cdot 10^3$$

та знаходимо значення $F_1(p_k)$ та $F_2'(p_k)$:

– при $p_1 = 0$

$$F_1(p_1) = 25 \cdot 10^4; \quad F_2'(p_1) = 25 \cdot 10^4;$$

– при $p_2 = -18.7 + j41.6$

$$\begin{aligned} F_1(p_2) &= 100 \cdot (-18.7 + j41.6)^2 + 3785 \cdot (-18.7 + j41.6) + 25 \cdot 10^4 = \\ &= 41020 + j1472 = 41050 e^{j2.055^\circ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2'(p_2) &= 360 \cdot (-18.7 + j41.6)^2 + 9000 \cdot (-18.7 + j41.6) + 25 \cdot 10^3 = \\ &= -4.156 \cdot 10^5 - j1.873 \cdot 10^5 = 4.559 \cdot 10^5 e^{-j155.745^\circ}; \end{aligned}$$

– при $p_3 = -18.7 - j41.6$

$$\begin{aligned} F_1(p_3) &= 100 \cdot (-18.7 - j41.6)^2 + 3785 \cdot (-18.7 - j41.6) + 25 \cdot 10^4 = \\ &= 41020 - j1472 = 41050 e^{-j2.055^\circ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2'(p_3) &= 360 \cdot (-18.7 - j41.6)^2 + 9000 \cdot (-18.7 - j41.6) + 25 \cdot 10^3 = \\ &= -4.156 \cdot 10^5 + j1.873 \cdot 10^5 = 4.559 \cdot 10^5 e^{j155.745^\circ}. \end{aligned}$$

3. Для комплексно-спряжених коренів p_2 і p_3 рішення для оригіналу, згідно формули (4.3)

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} \cdot e^{p_2 \cdot t} \right\} \\
i_1(t) &= \frac{25 \cdot 10^4}{25 \cdot 10^4} \cdot e^{0 \cdot t} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{41050 e^{j2.055^\circ}}{4.559 \cdot 10^5 e^{-j155.745^\circ}} \cdot e^{(-18.7 + j41.6) \cdot t} \right] = \\
&= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[0.09 e^{j157.81^\circ} \cdot e^{(-18.7 + j41.6) \cdot t} \right] = \\
&= 1 + 2 \cdot 0.09 \cdot \operatorname{Re} \left[e^{j157.81^\circ} \cdot e^{-18.7t} \cdot e^{j41.6t} \right] = \\
&= 1 + 0.18 \cdot e^{-18.7t} \cdot \cos(41.6t + 157.81^\circ) = \\
&= 1 + 0.18 \cdot e^{-18.7t} \cdot \sin(41.6t + 157.81^\circ + 90^\circ) = 1 + 0.18 \cdot e^{-18.7t} \cdot \sin(41.6t - 112.19^\circ) \text{ A.}
\end{aligned}$$

Як бачимо, вирази для перехідного струму у гілці з джерелом з ЕРС E_1 , підраховані операторним і класичним методами, співпадають.

5 Розрахунок перехідних процесів при ввімкненні кола до напруги довільної форми. Інтеграл Дюамеля

При підключенні лінійного пасивного двополюсника до напруги довільної форми (рис.5.1) перехідний процес розраховується з використанням інтегралу Дюамеля

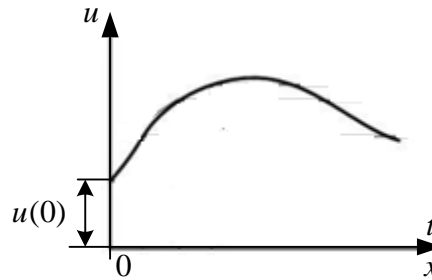


Рисунок 5.1

$$i_k(t) = u(0)g_k(t) + \int_0^t u'(x)g_k(t-x)dx, \quad (5.1)$$

де $u(0)$ – напруга в момент часу $t=0$;

$g_k(t)$ – перехідна провідність, чисельно дорівнює струму перехідного процесу при вмиканні кола на одиничну постійну напругу. Якщо розглядати напругу на k елементі, то у формулі інтегралу Дюамеля (5.1) замість $g_k(t)$ ввійде $y_k(t)$ – перехідна функція по напрузі: вона дорівнює напрузі на елементі у перехідному режимі при включенні кола на одиничну постійну напругу. Перехідна провідність та перехідна функція розраховуються класичним або операторним методом;

$u'(x)$ – похідна заданої напруги $u(t)$, де замість t підставляється нова змінна x ;

$g_k(t-x)$ – функція, яку отримують шляхом заміни у виразі перехідної провідності $g_k(t)$ часу t на $(t-x)$.

Вираз (5.1) є однією із основних форм запису інтеграла Дюамеля. Перший доданок в ньому враховує складову перехідного струму за рахунок

стрибка напруги при $t=0$, другий – складові від елементарних стрибків напруги, на які умовно розбивається досліджувальна функція напруги.

Якщо лінійний пасивний двополюсник вмикається на напругу, форма якого описується кусково-аналітичною функцією, тобто функцією, що задається різними аналітичними виразами на кожному кінцевому інтервалі та має розриви неперервності першого роду, то перехідний процес розраховується для кожного інтервалу окремо. Записуючи вираз для перехідного струму кожного інтервалу, що розглядається, необхідно враховувати складові струму, які обумовлені зміною напруги попередніх інтервалів. В якості прикладу запишемо вираз для перехідного струму по інтервалах для вхідної напруги рис. 5.2:

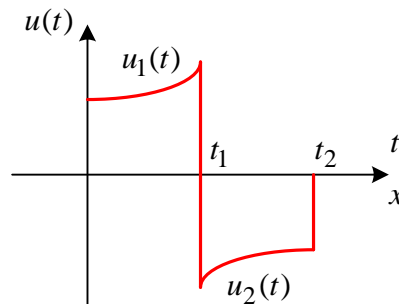


Рисунок 5.2

при $0 \leq t \leq t_1$

$$i(t) = u_1(0)g(t) + \int_0^t u_1'(x)g(t-x)dx;$$

при $t_1 \leq t \leq t_2$

$$i(t) = u_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(x)g(t-x)dx - [u_1(t_1) - u_2(t_1)]g(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(x)g(t-x)dx;$$

при $t_2 \leq t \leq \infty$

$$i(t) = u_1(0)g(t) + \int_0^t u_1'(x)g(t-x)dx - [u_1(t_1) - u_2(t_1)]g(t-t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(x)g(t-x)dx - u_2(t_2)g(t-t_2).$$

В окремому випадку, коли вхідна напруга має форму прямокутного імпульсу, всі похідні напруги на кожному інтервалі часу рівні нулю, складові перехідного струму будуть обумовлені тільки стрибками напруг (перший доданок у формулі Дюамеля). Так, для напруги на рис. 5.3

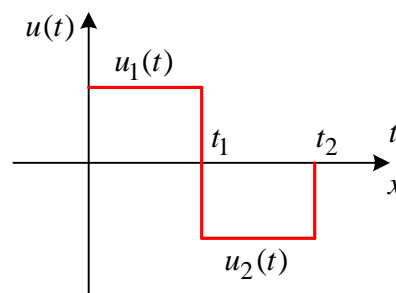


Рисунок 5.3

при $t_1 \leq t \leq t_2$

$$i(t) = u_1(0)g(t) - [u_1(t_1) - u_2(t_1)]g(t-t_1);$$

при $t_2 \leq t \leq \infty$

$$i(t) = u_1(0)g(t) - [u_1(t_1) - u_2(t_1)]g(t-t_1) - u_2(t_2)g(t-t_2).$$

Якщо потрібно знайти конкретні струми чи напруги у фіксований момент часу t_1, t_2, \dots, t_n , необхідно спочатку визначити, у які інтервали заданої напруги вони попадають. Значення фіксованих моментів часу повинно підставлятися у аналітичні вирази відповідних інтервалів. При підстановці $t=\infty$ у вирази перехідних струмів та напруг кінцевого інтервалу ($t_k \leq t \leq \infty$) відповіді повинні давати нульові значення. Це пояснюється тим, що енергія електричного та магнітного поля реактивних елементів, накопичена за час дії вхідного імпульсу напруги, при $t=\infty$ повинна повністю розсіюватися на активних опорах кола.

5.1 Приклади розрахунку перехідного процесу за допомогою інтеграла Дюамеля при підключенні пасивного двополюсника до напруги довільної форми

Приклад 1.

Для електричного кола (рис. 5.4), в якому діє джерело, форма напруги якого показана на рис. 5.5, знайти струм $i(t)$ для проміжку часу $0 \leq t \leq \infty$, якщо

$$R = 10 \text{ Ом}; C = 100 \text{ мкФ}; U = 100 \text{ В}; T = 10^{-3} \text{ с}.$$

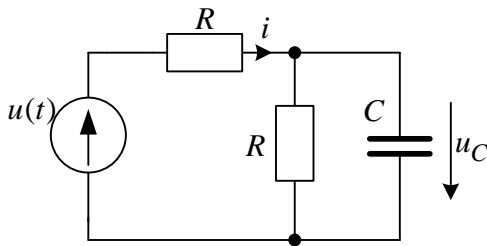


Рисунок 5.4

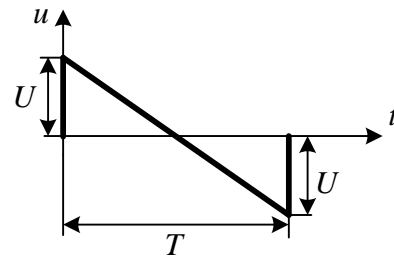


Рисунок 5.5

Розв'язок

1. Перехідну провідність $g(t)$ кола розрахуємо класичним методом при вмиканні досліджувального кола на постійну напругу $U=1 \text{ В}$ (рис.5.6).

$$i(t) = i_y + i_g$$

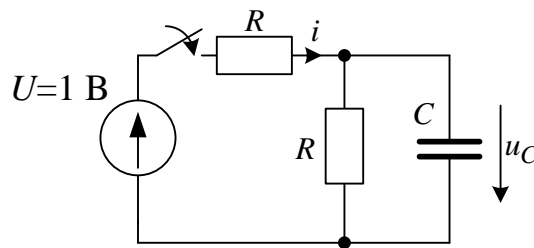


Рисунок 5.6

$$\text{Усталена складова } i_y = \frac{U}{R+R} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ А}$$

$$\text{Вільна складова } i_g = Ae^{pt}$$

Із характеристичного рівняння знаходимо p

$$\frac{1}{pC} + \frac{R}{2} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{RC} = -2000 \text{ с}^{-1};$$

Коефіцієнт A знаходимо при нульових початкових умовах:

за законом комутації $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ (конденсатор закорочує опір у паралельній гілці), тому $i(0) = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ A}$

$$i(0) = i_y + A \Rightarrow A = i(0) - i_y = 0.1 - 0.05 = 0.05$$

Перехідна провідність

$$g(t) = 0.05 + 0.05e^{-2000t}.$$

2. Закон зміни вхідної напруги

$$u(t) = \begin{cases} 100 - 2 \cdot 10^5 t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & T < t < \infty \end{cases}$$

Значення підінтегральних функцій виразу 5.1:

$$u'(x) = -2 \cdot 10^5$$

$$g(t-x) = 0.05 + 0.05e^{-2000(t-x)}$$

3. Розрахуємо вхідний струм на інтервалі $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} i(t) &= u(0)g(t) + \int_0^t u'(x)g(t-x)dx = \\ &= 100(0.05 + 0.05e^{-2000t}) + \int_0^t (-2 \cdot 10^5)(0.05 + 0.05e^{-2000(t-x)})dx = \\ &= 5(1 + e^{-2000t}) - 10^4 x \Big|_0^t - \frac{10^4}{2000}(e^{-2000t} \cdot e^{2000x}) \Big|_0^t = \underline{-10^4 t + 10e^{-2000t}} \text{ A} \end{aligned}$$

на інтервалі $T \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} i(t) &= u(0)g(t) + \int_0^T u'(x)g(t-x)dx - u(T)g(t-x) = \\ &= 100(0.05 + 0.05e^{-2000t}) + \int_0^T (-2 \cdot 10^5)(0.05 + 0.05e^{-2000(t-x)})dx - \\ &\quad - \left(-100(0.05 + 0.05e^{-2000(t-T)}) \right) = \end{aligned}$$

$$= 5(1 + e^{-2000t}) - 10^4 x \Big|_0^{10^{-3}} - \frac{10^4}{2000} (e^{-2000t} \cdot e^{2000x}) \Big|_0^{10^{-3}} + 100(0.05 + 0.05e^{2000 \cdot 10^{-3}} e^{-2000t}) =$$

$$= (5 + 5e^{-2000t}) + (-10 - 32e^{-2000t}) + (5 + 37e^{-2000t}) = \underline{10e^{-2000t}} \text{ A}$$

4. Побудуємо графік вхідного струму (рис.5.7) у відповідності з отриманими виразами. Дані для побудови графіку зведемо у таблицю 5.1

Таблиця 5.1

$t \cdot 10^{-3} \text{ c}$	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$0 \leq t \leq T$	10	3.56	-1.32	-5.26	-8.64	-	-	-	-
$T \leq t < \infty$	-	-	-	-	1.35	0.82	0.49	0.3	0.18

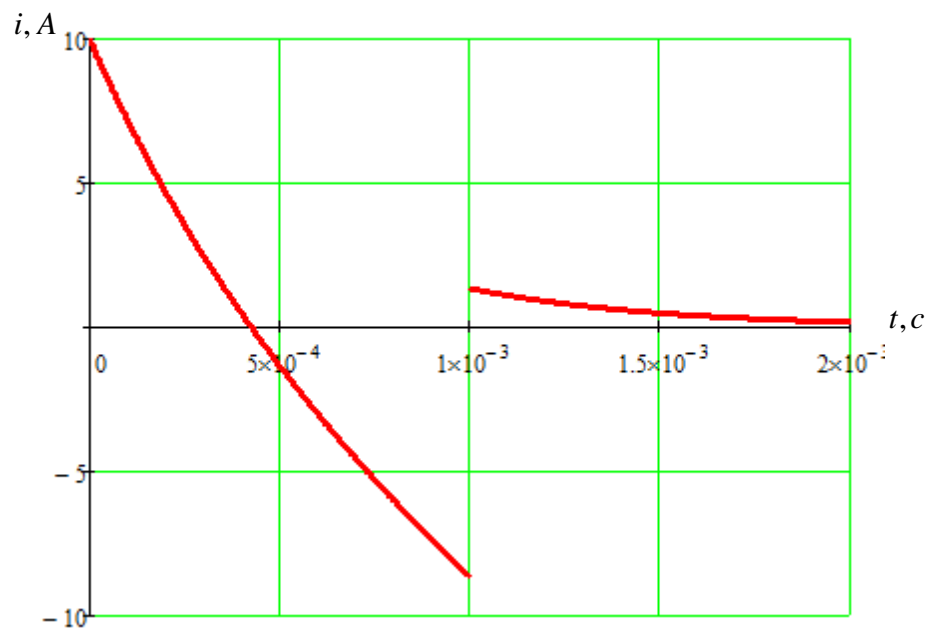


Рис. 5.7

Як видно із графіка рис. 5.7 – функція $i(t)$ буде розривна, за рахунок стрибкоподібних змін в кривій вхідної напруги і структури кола.

Визначимо струм у фіксовані моменти часу:

для часу $t_1 = 0.5T = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}$

$$i(t_1) = -10^4 t_1 + 10e^{-2000t_1} = -10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 10e^{-2000 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = -1.321 \text{ A}$$

для часу $t_2 = 1.5T = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ c}$

$$i(t_2) = 10e^{-2000t_2} = 10e^{-2000 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}} = 0.498 \text{ A}$$

Напругу на конденсаторі можна визначити, виконавши аналогічний розрахунок, попередньо знайшовши перехідну функцію по напрузі $u(t)$. Можна також використати другий закон Кірхгофа, який застосовується для кожного інтервалу вхідної напруги:

$$u_C(t) = u(t) - i(t)R.$$

Приклад 2.

Для електричного кола (рис. 5.8), в якому діє джерело, форма напруги якого показана на рис. 5.9, знайти струм $i_L(t)$ для проміжку часу $0 \leq t \leq \infty$, якщо

$$R_1 = R_3 = 40 \text{ Ом}; R_2 = 20 \text{ Ом}; L = 10 \text{ мГн}; U = 20 \text{ В}; T = 4 \cdot 10^{-3} \text{ c}.$$

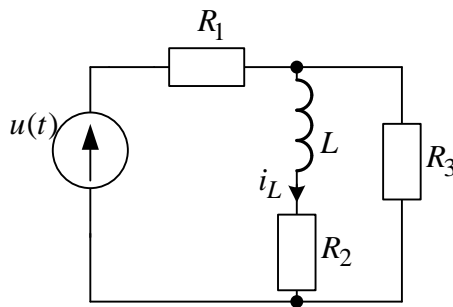


Рисунок 5.8

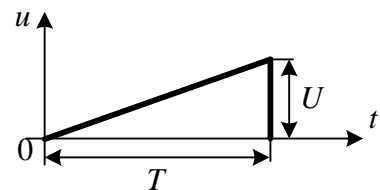


Рисунок 5.9

Розв'язок

1. Перехідна провідність гілки з індуктивністю розраховується класичним або операторним методом при вмиканні досліджуваного кола на постійну напругу $U=1 \text{ В}$:

$$g_L(t) = 0.0125 - 0.0125e^{-4000t}.$$

2. Закон зміни вхідної напруги

$$u(t) = \begin{cases} \frac{20}{4 \cdot 10^{-3}} t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & T \leq t < \infty \end{cases}$$

Значення підінтегральних функцій виразу 5.1:

$$u(0) = 0, \quad u'(x) = \frac{20}{4 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^3 \text{ В/с},$$

$$g_L(t-x) = 0.0125 \left(1 - e^{-4000(t-x)}\right).$$

3. Розрахуємо струм гілки з індуктивністю i_L :

на інтервалі $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= u(0)g_L(t) + \int_0^t u'(x)g_L(t-x)dx = \\ &= \int_0^t \left(\frac{20}{4 \cdot 10^{-3}}\right) \left(0.0125 - 0.0125e^{-4000(t-x)}\right) dx = \\ &= \left(\frac{20}{4 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \left(0.0125x \Big|_0^t - 0.0125 \cdot \frac{1}{4000} e^{-4000(t-x)} \Big|_0^t\right) = \\ &= \left(\frac{20}{4 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \left(0.0125t - 0.0125 \cdot \frac{1}{4000} + 0.0125 \cdot \frac{1}{4000} e^{-4000t}\right) = \\ &= \underline{62.5t - 0.0156 + 0.0156e^{-4000t} \text{ А}} \end{aligned}$$

на інтервалі $T \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= u(0)g(t) + \int_0^T u'(x)g(t-x)dx - u(T)g(t-x) = \\ &= \int_0^T \left(\frac{20}{4 \cdot 10^{-3}}\right) \left(0.0125 - 0.0125e^{-4000(t-x)}\right) dx - 20 \cdot \left(0.0125 - 0.0125e^{-4000(t-T)}\right) = \\ &= \left(\frac{20}{4 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \left(0.0125x \Big|_0^T - 0.0125 \cdot \frac{1}{4000} e^{-4000(t-x)} \Big|_0^T\right) - 20 \cdot \left(0.0125 - 0.0125e^{-4000(t-T)}\right) = \\ &= 20 \cdot 0.0125 - \frac{20}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot 0.0125 \cdot \frac{1}{4000} e^{-4000(t-T)} + \frac{20}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot 0.0125 \cdot \frac{1}{4000} e^{-4000t} - \\ &\quad - 20 \cdot 0.0125 + 20 \cdot 0.0125e^{-4000(t-T)} = \\ &= -0.0156e^{-4000(t-4 \cdot 10^{-3})} + 0.25e^{-4000(t-4 \cdot 10^{-3})} + 0.0156e^{-4000t} = \\ &= \underline{0.2344e^{-4000(t-4 \cdot 10^{-3})} + 0.0156e^{-4000t} \text{ А}} \end{aligned}$$

4. Побудуємо графік струму i_L (рис.5.8) у відповідності з отриманими виразами. Дані для побудови графіку зведемо у таблицю 5.2

Таблиця 5.2

$t \cdot 10^{-3} c$	0	1	2	3	4	4.2	4.4	4.6
$0 \leq t \leq T$	0	0.047	0.109	0.172	0.234	-		
$T \leq t < \infty$	-	-	-	-	0.234	0.1053	0.047	0.021

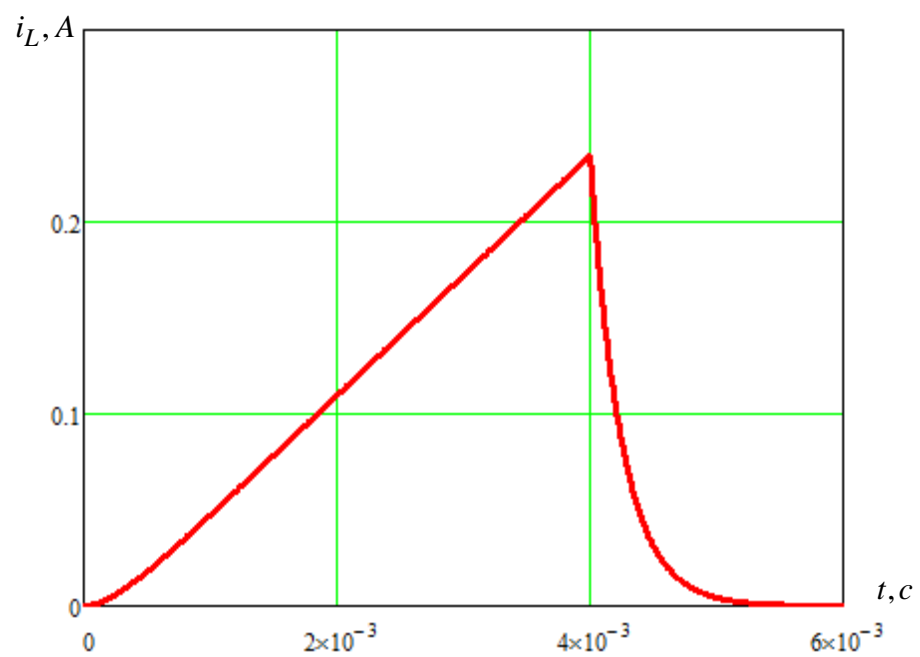


Рис. 5.8

6 Умови завдання

1. В схемі з джерелами E_1 та E_2 (рис. 6.1) розрахувати:

а) **класичним методом:** струми перехідного процесу і напруги на реактивних елементах;

б) **операторним методом:** струм та напругу на котушці індуктивності (для парних варіантів); струм та напругу на конденсаторі (для непарних варіантів);

в) Побудувати графіки перехідного струму та напруги величин, знайдених ператорним методом.

2. Визначити струми у гілках і напруги на реактивних елементах в момент комутації ($t=0$), якщо замість джерел сталих ЕРС E_1 та E_2 в колі діють джерела синусоїдних ЕРС:

$$e_1(t) = E_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad e_2(t) = E_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi + 30^\circ).$$

Примітка. Дані для розрахунку вибрати згідно з тризначним шифром. Перша цифра відповідає номеру колонки таблиці 6.1, друга - номеру колонки таблиці 6.2, номер схеми кола (рис.6.1) визначається останніми двома цифрами тризначного шрифту – (01, 30).

3. На вхід електричного кола, схеми якого приведені на рис 6.2, надходить сигнал у вигляді короткочасного імпульсу напруги. Форми кривих імпульсу в залежності від варіанту завдання приведені на рис. 6.3. Характеристики сигналу (U , T) і параметри схеми (R_1 , R_2 , L , C) вказані в таблицях 6.2 та 6.1.

Необхідно:

а) Методом інтеграла Дюамеля отримати аналітичні рішення для вхідного струму і напруги реактивного елемента на всіх часових інтервалах сигналу ($0 \leq t \leq \infty$).

б) По знайденим рішенням виконати розрахунки струму і напруги для (3–4)-х фіксованих моментів часу на кожному з інтервалів сигналу.

Розрахунки подати у вигляді відповідних таблиць та часових графіків (див. «Приклад розрахунків», наведені в методичних вказівках, § 5).

Примітка. Час дії сигналу T (табл. 6.2) наведено в долях від τ – стала часу досліджувального кола.

Вказівка. Варіант завдання визначається трьохзначним числом. *Перша* цифра варіанту визначає стовпчик (U, T) із табл. 6.2, *друга* стовпчик із параметрами R, L, C елементів схеми, *третья* – номер схеми (рис 6.2). Номер сигналу визначається за сумою двох останніх цифр $\text{№}2 + \text{№}3 = \text{№}4$. По *четвертій* цифрі $\text{№}4$ вибирається відповідний сигнал (рис. 6.3).

Шифр задається викладачем.

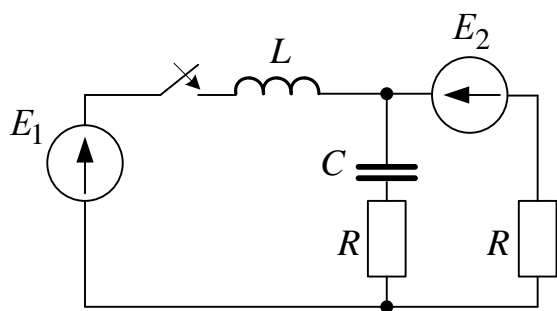
Таблиця 6.1

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R, \text{ Ом}$	35	30	35	50	55	60	70	80	90	100
$L, \text{ Гн}$	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19
$C, \text{ мкФ}$	140	130	120	110	100	90	80	70	60	50

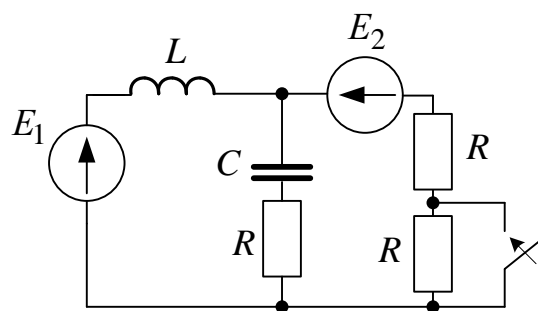
Таблиця 6.2

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E_1, \text{ В}$	100	90	80	110	60	70	120	150	180	160
$E_2, \text{ В}$	80	60	130	90	140	50	100	170	70	50
ψ°	10	15	20	30	40	45	60	150	120	90
$\omega, \text{ с}$	100	200	150	300	250	100	200	250	300	150
$U, \text{ В}$	100	110	120	130	140	95	80	75	70	65
T/τ	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5

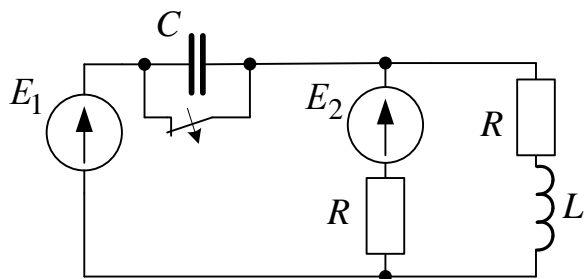
1



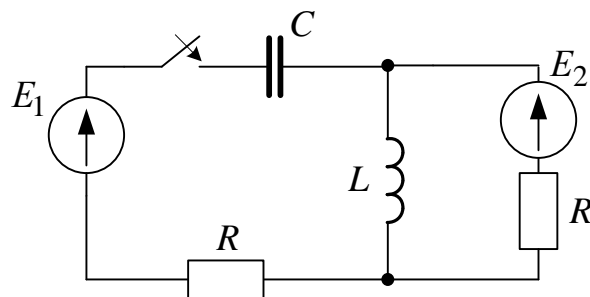
2



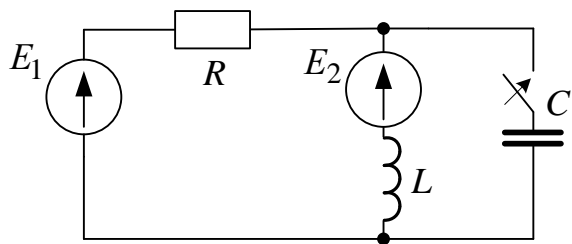
3



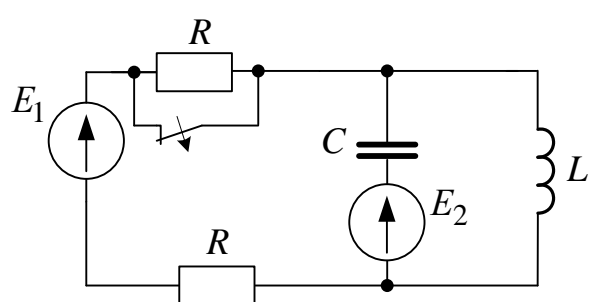
4



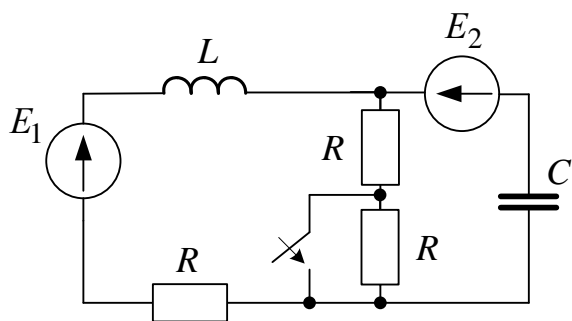
5



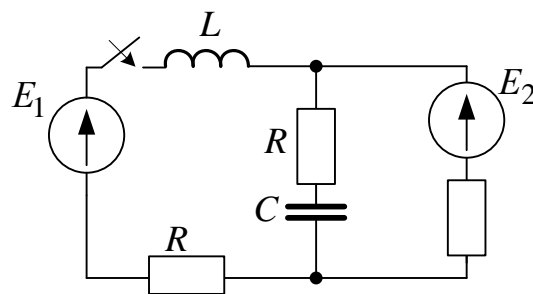
6



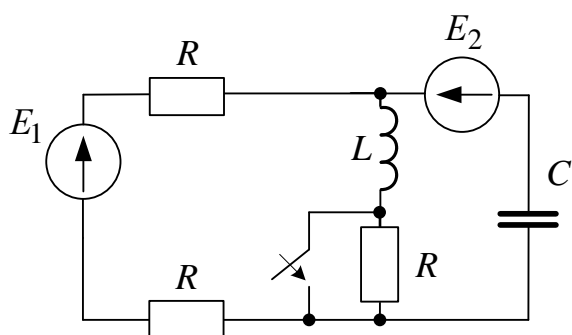
7



8



9



10

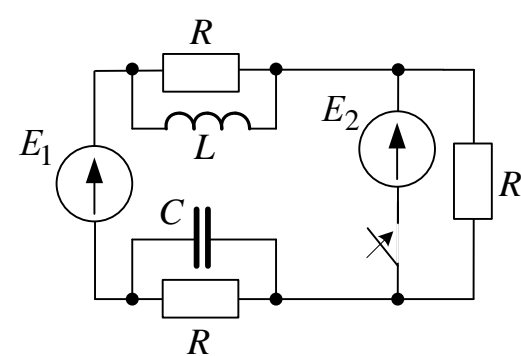
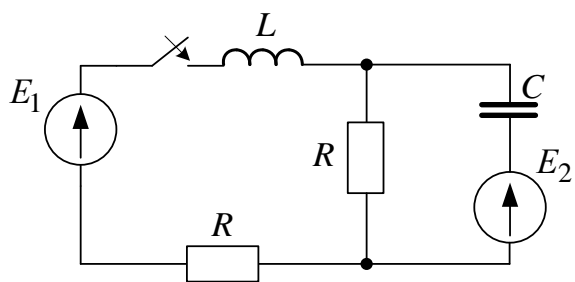
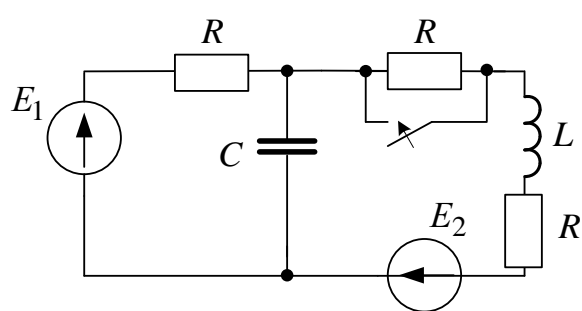


Рисунок 6.1

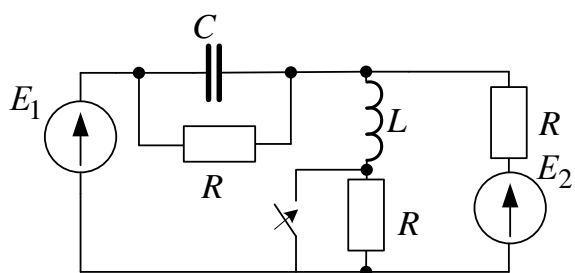
11



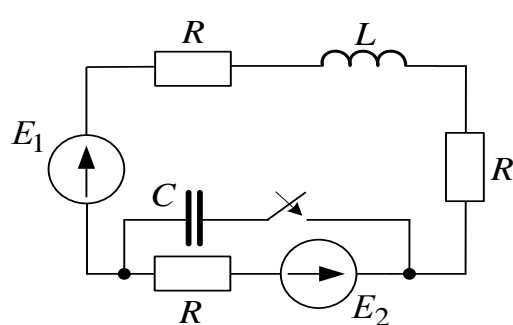
12



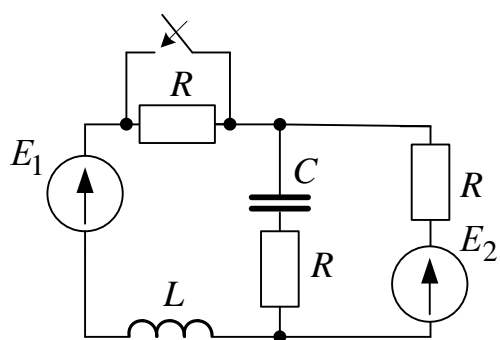
13



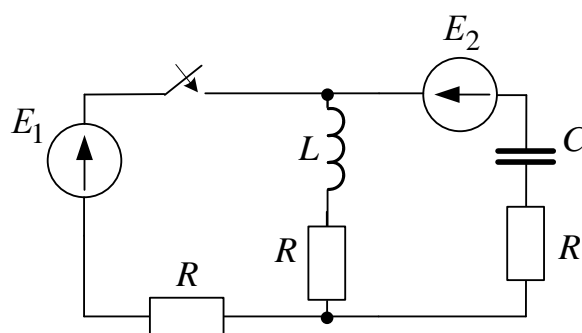
14



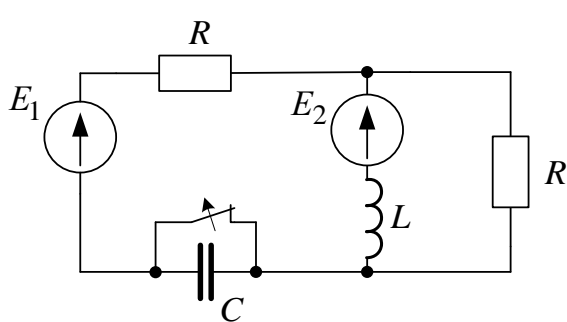
5



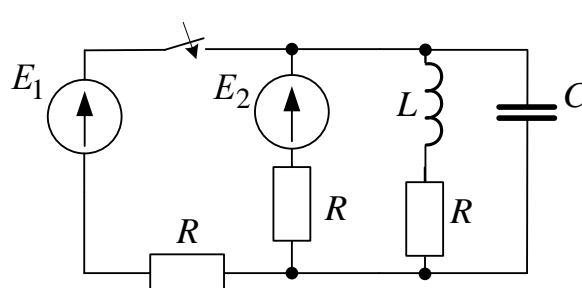
16



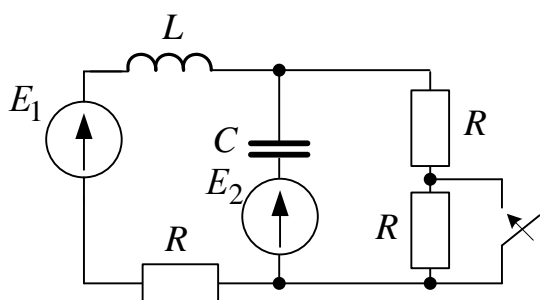
17



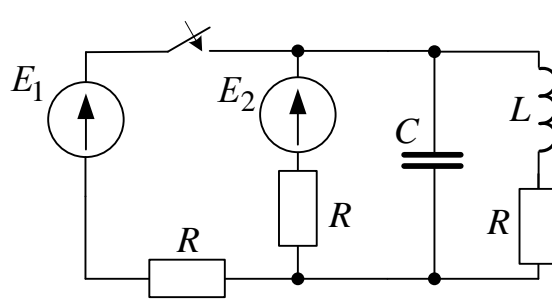
18



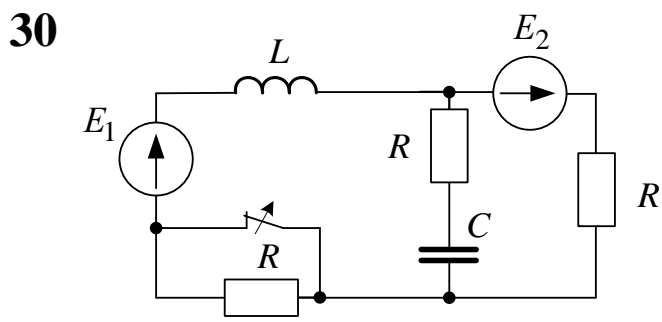
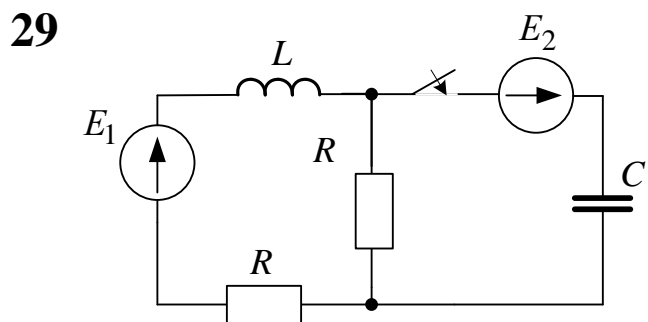
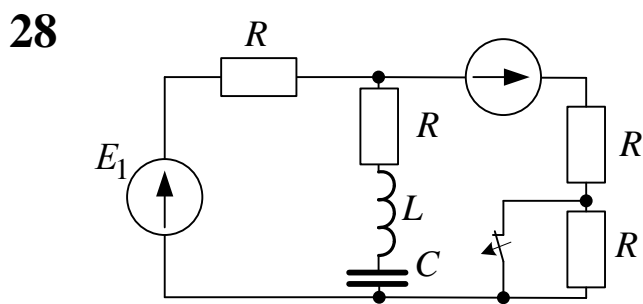
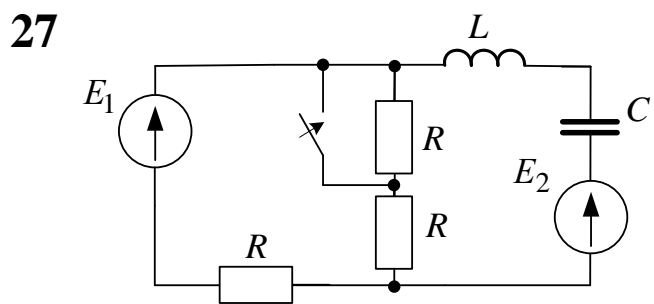
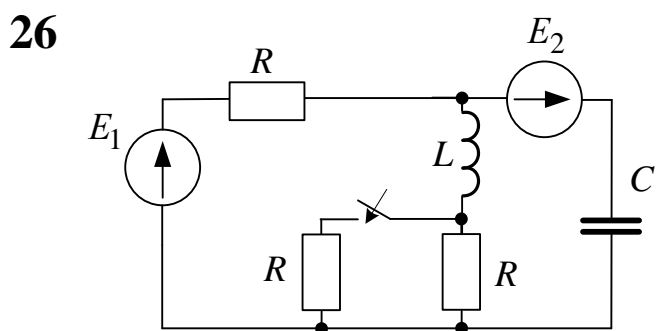
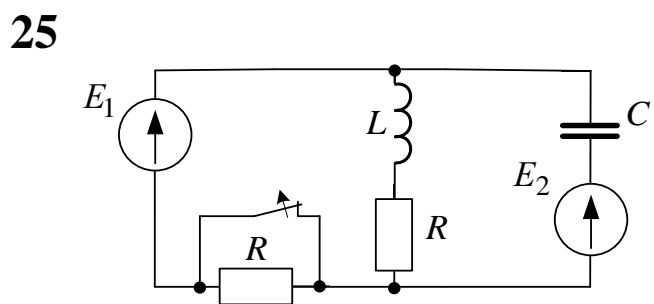
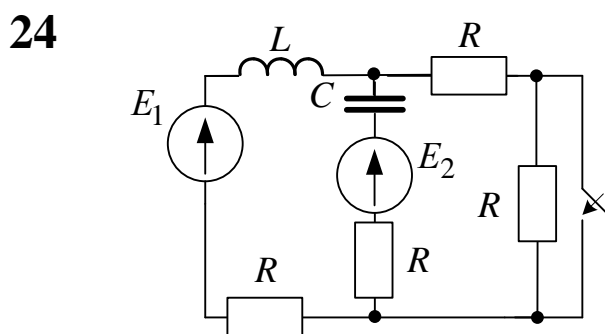
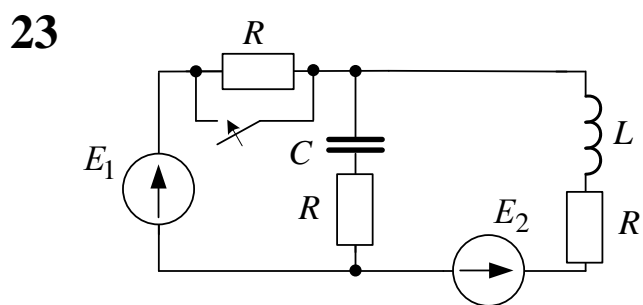
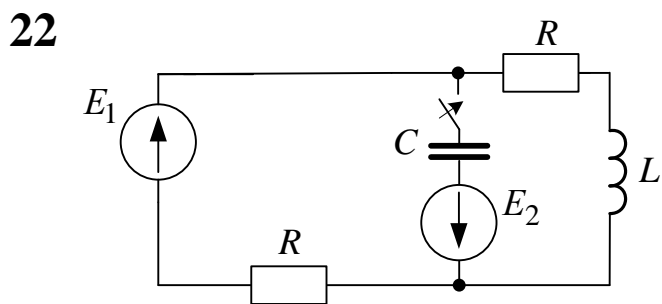
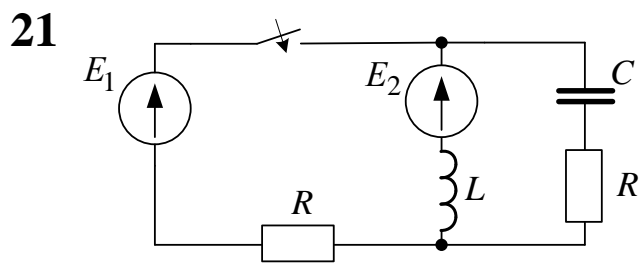
9



20

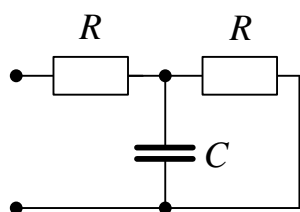


Продовження рисунку 6.1

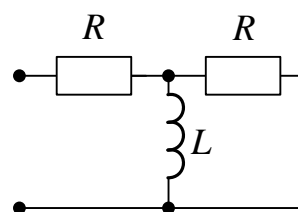


Продовження рисунк 6.1

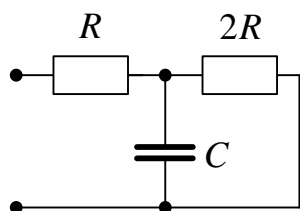
1



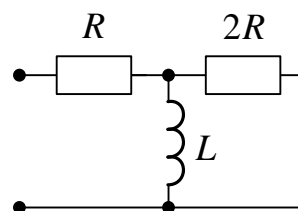
2



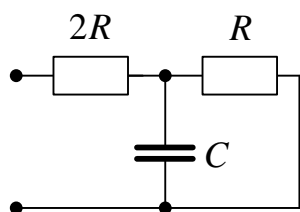
3



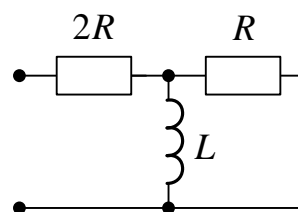
4



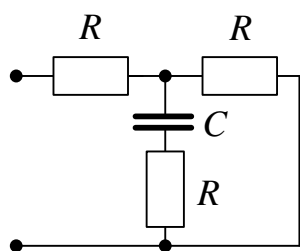
5



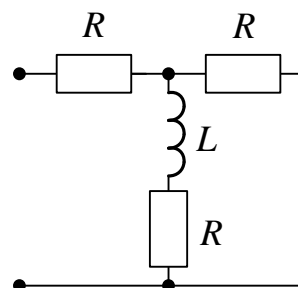
6



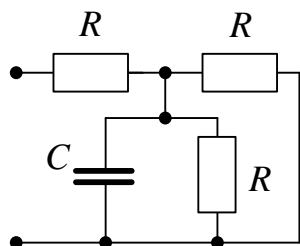
7



8



9



0

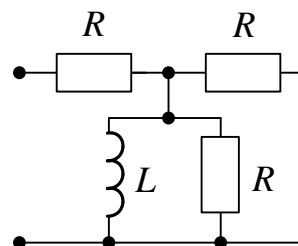
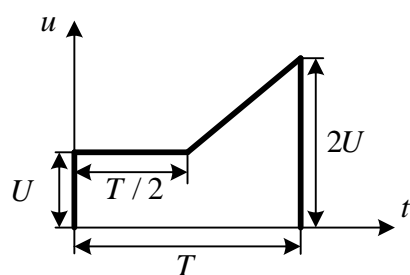
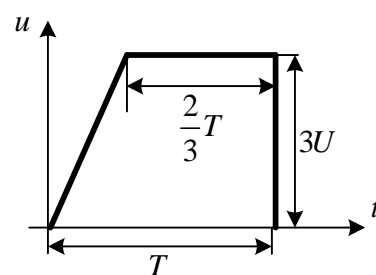


Рисунок 6.2

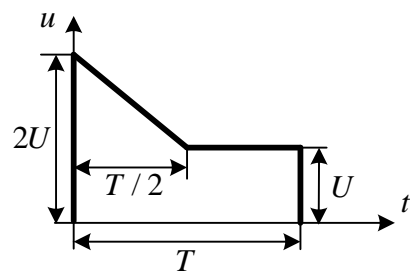
1



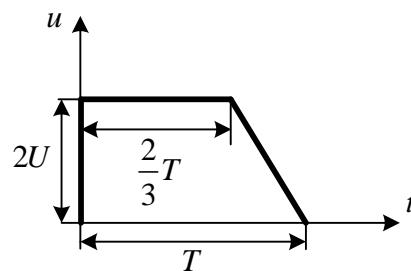
2



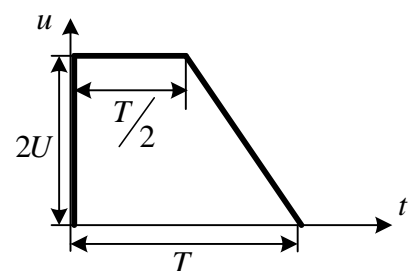
3



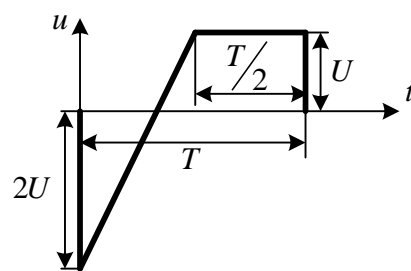
4



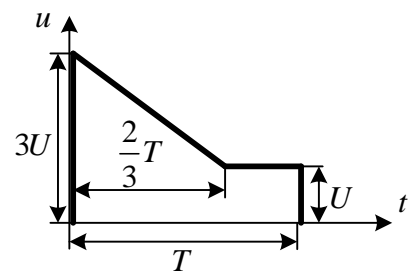
5



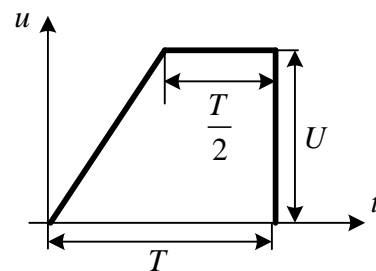
6



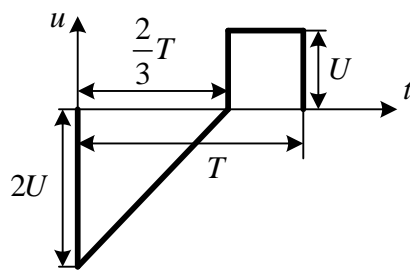
7



8



9



0

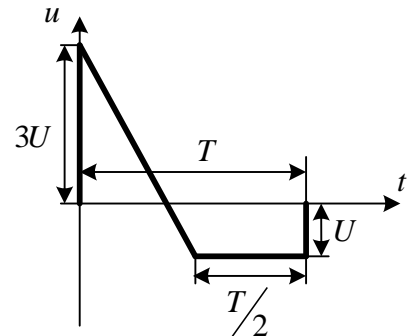


Рисунок 6.3

Список рекомендованої літератури

- 1.** Бойко В. С., Видолоб Ю. Ф., Курило І. А. та ін. Теоретичні основи електротехніки. Т2 – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 224 с.
- 2.** Курило І.А., Грудська В.П., Спінул Л.Ю., Щерба М.А. Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах : навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 289 с.
- 3.** Перхач В. С. Теоретична електротехніка. – К.: Вища школа, 1992. – 439 с.
- 4.** Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т1. – Л.: Энергоиздат, 2001. – 536 с.